科目	数学・応用数学	分野	微分積分	１枚目 / ２枚中	受験番号		小計		合計	

1

関数 $f(x) = \sqrt{x}\log(\sqrt{x}+1)$ を微分せよ。(5 点)
解答

$$f'(x) = \sqrt{x}\frac{1}{\sqrt{x}+1}\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\log(\sqrt{x}+1)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{\log(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}\right)$$

2

極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\pi}{2} - \mathrm{Tan}^{-1}x}$ を求めよ。(5 点)
解答

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\pi}{2} - \mathrm{Tan}^{-1}x} = \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2} = 1$$

3

次の積分をせよ。(5 点 ×2)
(1) $\displaystyle\int \sin^4 x\cos x dx$
解答

$\sin x = t$ とする。$\cos x dx = dt$ となるから $\displaystyle\int \sin^4 x\cos x dx = \int t^4 dt = \frac{1}{5}t^5 + C = \frac{1}{5}\sin^5 x + C$
積分定数がないときは 4 点。

(2) $\displaystyle\int_0^1 (x^2+1)e^x dx$
解答

$$\int_0^1 (x^2+1)e^x dx = \left[(x^2+1)e^x\right]_0^1 - \int_0^1 2xe^x dx$$
$$= 2e - 1 - [2xe^x]_0^1 + \int_0^1 2e^x dx$$
$$= 2e - 1 - 2e + [2e^x]_0^1 = 2e - 3$$

科目	数学・応用数学	分野	微分積分	２枚目 ２枚中	受験番号		小計		合計	

4

関数 $f(x,y)=\dfrac{x}{x+y^2}$ を偏微分して $\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$ と $\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$ をもとめよ。(10 点)

解答

$$f_x(x,y)=\frac{x+y^2-x}{(x+y^2)^2}=\frac{y^2}{(x+y^2)^2}$$
$$f_y(x,y)=\frac{-2xy}{(x+y^2)^2}$$

片方正解の場合 5 点。

5

三つの不等式 $x\geqq 0$、$y\geqq 0$、$x^2+y^2\leqq 4$ をすべて満たす領域を D とする。
二重積分 $\iint_D (x^2+xy-y^2)dxdy$ を求めよ。(10 点)

解答

$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ により極座標に変換すると範囲は $0\leqq r\leqq 2,\ 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ となる。よって

$$\iint_D (x^2+xy-y^2)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_0^2 r^3(\cos^2\theta+\cos\theta\sin\theta-\sin^2\theta)dr\right\}d\theta \text{(ここまでで 3 点)}$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^2(\cos^2\theta+\cos\theta\sin\theta-\sin^2\theta)d\theta$$
$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2\theta+\cos\theta\sin\theta-\sin^2\theta)d\theta \text{(ここまでで 6 点)}$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta)d\theta$$
$$=4\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta-\frac{1}{4}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=2$$

科目	数学・応用数学	分野	線形代数	１枚目 / ２枚中	受験番号		小計		合計	

1

行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ の行列式 $|A|$ を求めよ。また A の逆行列を求めよ。

(行列式 S 系 3 点 K 系 5 点、逆行列 S 系 4 点 K 系 5 点)

解答

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 4 + 4 - 1 - 12 - 12 = -8$$

余因子を求める。

$$\tilde{a}_{1,1} = \tilde{a}_{3,3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\tilde{a}_{1,2} = \tilde{a}_{2,1} = \tilde{a}_{2,3} = \tilde{a}_{3,2} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$\tilde{a}_{1,3} = \tilde{a}_{3,1} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$\tilde{a}_{2,2} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8$$

よって逆行列は

$$\frac{-1}{8} \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ -4 & 8 & -4 \\ 3 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$ となる。

単純な計算ミスは一ヶ所 -2 点、二ヶ所以上で 0 点。

2

行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。(S 系 8 点 K 系 10 点)

解答

固有方程式は $\lambda^2 - 3 = 0$ となるので固有値は $\lambda = \pm\sqrt{3}$ である。(ここまで S 系 4 点 K 系 5 点)

$\lambda = \sqrt{3}$ のときの固有ベクトルは

$\begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} & 2 \\ 1 & -1+\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より $(1-\sqrt{3})x + 2y = 0$

c_1 を 0 以外の任意の数として $c_1\begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{3}-1 \end{pmatrix}$ が固有ベクトル。

$\lambda = -\sqrt{3}$ のときの固有ベクトルは

$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 2 \\ 1 & -1+\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より $(1+\sqrt{3})x + 2y = 0$

c_2 を 0 以外の任意の数として $c_2\begin{pmatrix} -2 \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$ が固有ベクトル。

固有ベクトルの片方のみ正解のときは S 系 6 点、K 系 7 点。

科目	数学・応用数学	分野	微分方程式	１枚目 / ２枚中	受験番号		小計		合計	

1

次の微分方程式を解け。 (S 系 4 点 × 2, K 系 5 点 ×2)

(1) $xyy' = x^2 + xy + y^2$

解答

$y = ux$ とすると $y' = u'x + u$, これを代入すると $xy(u'x + u) = x^2 + x^2u + x^2u^2$

$x^3uu' = x^2 + x^2u$

$\dfrac{u}{1+u}u' = \dfrac{1}{x}$(ここまでで 2 点) これを積分して $\displaystyle\int(1 - \frac{1}{u+1})du = \int \frac{1}{x}dx$

$u - \log|u+1| = \log|x| + C$(ここまでで S 系 3 点、K 系 4 点)

$u = \log|x(u+1)| + C$

$\frac{y}{x} = \log|x+y| + C$ C は任意の定数。

(2) $4y'' - 4y' + y = 0$

解答

特性方程式は $4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$ 特性解は $\lambda = \frac{1}{2}$ の重解である。

よって解は $y = (c_1 + c_2x)e^{\frac{1}{2}x}$ である。c_1, c_2 は任意の定数。

2

次の微分方程式の特殊解を与えられた初期条件の下でもとめよ。

(1) $y'\cos x = (y+1)\sin x$ ($x=0$ のとき $y=0$)(S 系 4 点,K 系 5 点)

解答

変形して $\dfrac{y'}{y+1} = \tan x$

積分して、$\log|y+1| = -\log|\cos x| + c_1$

$\pm e^{c_1} = c_2$ として一般解は $y+1 = c_2\dfrac{1}{\cos x}$

となる。(ここまで S 系 2 点 K 系 3 点)

初期条件 $x=0, y=0$ を代入すると $1=c_2$

よって解は $y = \dfrac{1}{\cos x} - 1$

(2) $y'' - 3y' + 2y = 6e^{3x}$ ($x=0$ のとき $y=2,\ y'=6$)(S 系 3 点, K 系 5 点)

特性方程式は $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ 特性解は $\lambda = 1, 2$, 斉次の一般解は $y = c_1e^x + c_2e^{2x}$ となる。

特殊解を $y = ae^{3x}$ とすると $y' = 3ae^{3x}$, $y'' = 9ae^{3x}$ これを方程式に代入すると $9ae^{3x} - 9ae^{3x} + 2ae^{3x} = 6e^{3x}$ よって $a=3$ つまり特殊解は $y = 3e^{3x}$ よって非斉次の一般解は $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + 3e^{3x}$ となる。(ここまで S 系 2 点 K 系 3 点)

微分すると $y' = c_1e^x + 2c_2e^{2x} + 9e^{3x}$ となる。初期条件を代入すると $\begin{cases} 2 = c_1 + c_2 + 3 \\ 6 = c_1 + 2c_2 + 9 \end{cases}$

これを解いて $c_1 = 1, c_2 = -2$ よって特殊解は

$y = e^x - 2e^{2x} + 3e^{3x}$

科目	数学・応用数学	分野	確率と統計	１枚目 / １枚中	受検番号		小計		合計	

次の[1]と[2]を両方とも解答せよ．（配点［Ｓ系］：[1] 8 点[2] 7 点；　［Ｋ系］：[1] 10 点[2] 10 点）

[1]　X の確率密度関数$f(x)$が

$$f(x)=\begin{cases}2x & (0\leq x\leq 1\text{のとき})\\ 0 & (\text{その他の}x\text{のとき})\end{cases}$$

で与えられるとき，X の平均，分散，標準偏差を求めよ．

[2]　［正規分布表から得られる数値 1.65, 1.96, 2.33, 2.58 のいずれを使用すること．］

正規母集団$N(\mu,128)$から無作為抽出した大きさ200 の標本の平均値が70.0であった．μの99%信頼区間を求めよ．（ただし，標本分布から推定の計算に至る過程が分かる記述にすること．）

[1]

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_0^1 2x^2dx=2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}$$ 【Ｓ：３；Ｋ：３】

$$V[X]=\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-\frac{2}{3}\right)^2 f(x)dx=\int_0^1\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}\right)2xdx=2\int_0^1\left(x^3-\frac{4}{3}x^2+\frac{4}{9}x\right)dx$$

$$=2\left[\frac{x^4}{4}-\frac{4}{9}x^3+\frac{2}{9}x^2\right]_0^1=2\left(\frac{1}{4}-\frac{4}{9}+\frac{2}{9}\right)=\frac{1}{18}$$ 【Ｓ：３；Ｋ：４】

$$\sigma[X]=\sqrt{V[X]}=\sqrt{\frac{1}{18}}=\frac{\sqrt{18}}{18}=\frac{\sqrt{2}}{6}$$ 【Ｓ：２；Ｋ：３】

[2]　標本の大きさ $n=200$，母分散 $\sigma^2=128$，

標本平均 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(\mu,\frac{128}{200}\right)=N\left(\mu,\frac{64}{100}\right)$ に従うので，　【Ｓ：２；Ｋ：３】

$Z=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{64/100}}$ について正規分布表によって，

$$P\left(-2.58\leq\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{64}{100}}}\leq 2.58\right)=0.99$$ 【Ｓ：２；Ｋ：３】

が成り立つ．括弧内の不等式を変形し，標本平均の実現値 $\bar{x}=70.0$ を用いると，母平均 μ の99%信頼区間は

$$70.0-2.58\times\frac{8}{10}\leq\mu\leq 70.0+2.58\times\frac{8}{10}$$

$$\therefore 70.0-2.064\leq\mu\leq 70.0+2.064 \qquad \therefore 67.9\leq\mu\leq 72.1$$ 【Ｓ：３；Ｋ：４】

となる．

科目	数学・応用数学	分野	ベクトル解析	１枚目 / １枚中	受検番号		小計		合計	

次の$\boxed{1}$と$\boxed{2}$を両方とも解答せよ．（配点［Ｓ系］：$\boxed{1}$ 8 点$\boxed{2}$ 7 点；　［Ｋ系］：$\boxed{1}$ 10 点$\boxed{2}$ 10 点）

$\boxed{1}$ (a)　スカラー場 $\varphi = 3x^3y - xy^3 + xyz^2$ について，その勾配 $\nabla\varphi$ とラプラシアン $\nabla^2\varphi$を求めよ．

(b)　次のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の発散 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ を求めよ．$\boldsymbol{A} = xy^2\boldsymbol{i} + \log(y^2+z^2)\,\boldsymbol{j} + \sin xz\,\boldsymbol{k}$

(c)　次のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の回転 $\nabla\times\boldsymbol{A}$ を求めよ．$\boldsymbol{A} = e^x\boldsymbol{i} + e^{xy}\boldsymbol{j} + e^{xyz}\boldsymbol{k}$

$\boxed{2}$ ベクトル場 $\boldsymbol{A} = 2y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} - 8x^2z\,\boldsymbol{k}$ について，次の曲線 C に沿っての線積分

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$$

を求めよ．ここで，C は点Ｐ (1, 0, −1)を始点，点Ｑ (0, 2, 0)を終点とする線分である．

$\boxed{1}$

(a) $\nabla\varphi = \nabla\{3x^3y - xy^3 + xyz^2\} = (9x^2y - y^3 + yz^2)\boldsymbol{i} + (3x^3 - 3xy^2 + xz^2)\boldsymbol{j} + 2xyz\,\boldsymbol{k}$

$$\nabla^2\varphi = \nabla\cdot(\nabla\varphi) = 18xy - 6xy + 2xy = 14xy$$

【Ｓ：３；　Ｋ：４】

(b) $$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\partial}{\partial x}(xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\log(y^2+z^2)\right) + \frac{\partial}{\partial z}(\sin xz) = y^2 + \frac{2y}{y^2+z^2} + x\cos xz$$

【Ｓ：２；　Ｋ：３】

(c) $$\nabla\times\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ e^x & e^{xy} & e^{xyz} \end{vmatrix} = (xze^{xyz} - 0)\boldsymbol{i} + (0 - yze^{xyz})\boldsymbol{j} + (ye^{xy} - 0)\boldsymbol{k}$$

$$= xze^{xyz}\boldsymbol{i} - yze^{xyz}\boldsymbol{j} + ye^{xy}\boldsymbol{k}$$

【Ｓ：３；　Ｋ：３】

$\boxed{2}$ C は$\boldsymbol{r} = (1-t)\,\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + (t-1)\boldsymbol{k}$　$(0 \le t \le 1)$

線分C に沿って，$\boldsymbol{A} = 4t\boldsymbol{i} + (1-t)\boldsymbol{j} - 8(1-t)^2(t-1)\,\boldsymbol{k} = 4t\boldsymbol{i} + (1-t)\boldsymbol{j} - 8(t-1)^3\,\boldsymbol{k}$

$$\boldsymbol{r}' = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

【Ｓ：３；　Ｋ：３】

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_C \boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}dt = \int_0^1(-4t + 2(1-t) - 8(t-1)^3)dt = \int_0^1(-6t + 2 - 8(t-1)^3)dt$$

【Ｓ：２；　Ｋ：４】

$$= [-3t^2 + 2t - 2(t-1)^4]_0^1 = -1 + 2 = 1$$

【Ｓ：２；　Ｋ：３】

科目	数学・応用数学	分野	複素関数	１枚目／１枚中	受検番号		小計		合計	

次の$\boxed{1}$と$\boxed{2}$を両方とも解答せよ．（配点［Ｓ系］：$\boxed{1}$ 8 点$\boxed{2}$ 7 点；　［Ｋ系］：$\boxed{1}$ 10 点$\boxed{2}$ 10 点）

$\boxed{1}$　コーシーの積分表示を利用して，次の積分(1)(2)を求めよ．ただし，C は円$|z-i|=3$ とする．

(1) $\displaystyle\int_C \frac{1}{e^z(z-\pi i)^2}dz$　　　(2) $\displaystyle\int_C \frac{e^{\pi z}}{z^2-3iz}dz$

$\boxed{2}$　コーシー・リーマンの方程式を利用して，次の関数が正則であることを示し，導関数を求めよ．

$$w=\cos(z+1)$$

ただし，三角関数の加法定理と $\cos(iz)=\cosh z$，　$\sin(iz)=i\sinh z$ の関係を利用しても良い．

$\boxed{1}$ (1) 点 $z=\pi i$ は円C の内部にある．

$$\int_C \frac{1/e^z}{(z-\pi i)^2}dz=\frac{2\pi i}{1!}\left[\frac{d}{dz}(e^{-z})\right]_{z=\pi i}=2\pi i\left(-e^{-\pi i}\right)=2\pi i$$

【Ｓ：４；Ｋ：５】

(2) ２つの点 $z=0,\ 3i$ は共に円C の内部にある．（C_1, C_2 は単一閉曲線で，それぞれの内部に１点 $z=0,\ z=\ 3i$ のみが特異点としてある．）

$$\int_C \frac{e^{\pi z}}{z(z-3i)}dz=\int_{C_1}\frac{1}{z}\left(\frac{e^{\pi z}}{z-3i}\right)dz+\int_{C_2}\frac{1}{z-3i}\left(\frac{e^{\pi z}}{z}\right)dz$$

$$=2\pi i\left\{\frac{e^0}{0-3i}+\frac{e^{i3\pi}}{3i}\right\}=-\frac{4\pi}{3}$$

【Ｓ：４；Ｋ：５】

$\boxed{2}$ $w=\cos(x+1+iy)=\cos(x+1)\cos(iy)-\sin(x+1)\sin(iy)=\cos(x+1)\cosh y-i\sin(x+1)\sinh y$

となるので，$w=u+iv$ について　【Ｓ：２；Ｋ：３】

$$u_x=-\sin(x+1)\cosh y \qquad u_y=\cos(x+1)\sinh y$$

$$v_x=-\cos(x+1)\sinh y \qquad v_y=-\sin(x+1)\cosh y$$

【Ｓ：２；Ｋ：３】

$\therefore u_x=v_y \qquad v_x=-u_y$　よって w は正則である．　【Ｓ：２；Ｋ：２】

導関数は $w'=u_x+iv_x=-\sin(x+1)\cosh y-i\cos(x+1)\sinh y=-\sin(z+1)$ である．

【Ｓ：１；Ｋ：２】

科目	数学・応用数学	分野	フーリエ級数・ラプラス変換	１枚目 / １枚中	受検番号		小計		合計	

次の$\boxed{1}$と$\boxed{2}$を両方とも解答せよ．（配点［Ｓ系］：$\boxed{1}$ 8 点$\boxed{2}$ 7 点；　［Ｋ系］：$\boxed{1}$ 10 点$\boxed{2}$ 10 点）

$\boxed{1}$　次の関数のフーリエ正弦級数を求めよ．$f(x)$を周期2πの奇関数に拡張して考えること．

(1)　$f(x) = 2 \quad (0 \le x \le \pi)$　　　(2)　$f(x) = \dfrac{1}{2}(\pi - x) \quad (0 \le x \le \pi)$

$\boxed{2}$　ラプラス変換を利用して，次の微分方程式を[　] 内の初期条件のもとで解け．ただし$\mathcal{L}\,y(t) = Y(s)$とする．　$y'' + 4y' + 4y = te^{-2t}$　$[\,y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1\,]$

$\boxed{1}$

(1) $$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx = \frac{4}{\pi}\left[\frac{-1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi} = \frac{4}{n\pi}(1-\cos(n\pi))$$

$$= \begin{cases} \dfrac{8}{n\pi} & (n = 2k-1) \\ 0 & (n = 2k) \end{cases} \qquad \therefore\ f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x$$　【Ｓ：４；Ｋ：５】

(2) $$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left\{\left[-\frac{(\pi - x)}{n}\cos nx\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right\}$$

$$= \frac{\pi}{n\pi} - \frac{1}{n\pi}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi} = \frac{1}{n} \qquad \therefore\ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx$$　【Ｓ：４；Ｋ：５】

$\boxed{2}$

$$\mathcal{L}(y'' + 4y' + 4y) = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4\big(sY(s) - y(0)\big) + 4Y(s)$$
$$= (s^2 + 4s + 4)Y(s) - 1$$

$$\mathcal{L}(te^{-2t}) = \frac{1}{(s+2)^2}, \qquad \therefore\ (s+2)^2Y(s) - 1 = \frac{1}{(s+2)^2}$$　【Ｓ：３；Ｋ：４】

$$\therefore\ (s+2)^2Y(s) = \frac{1}{(s+2)^2} + 1$$

$$\therefore\ Y(s) = \frac{1}{(s+2)^4} + \frac{1}{(s+2)^2}$$　【Ｓ：１；Ｋ：２】

$$\therefore\ y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^4} + \frac{1}{(s+2)^2}\right\} = \frac{t^3}{6}e^{-2t} + te^{-2t}$$　【Ｓ：３；Ｋ：４】