| 科目 | 数学・応用数学 | 分野 | 微分積分 | １枚目／２枚中 | 受験番号 | | 小計 | | 合計 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

**1**

関数 $f(x) = \sin\sqrt{x^2+1}$ を微分せよ。(5 点)
解答

$$f'(x) = \cos\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1})' = \cos\sqrt{x^2+1}\cdot\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x$$
$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cos\sqrt{x^2+1}$$

**2**

極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{(x-\pi)^2}{1+\cos x}$ を求めよ。(5 点)
解答

$$\lim_{x\to\pi}\frac{(x-\pi)^2}{1+\cos x} = \lim_{x\to\pi}\frac{2(x-\pi)}{-\sin x} = \lim_{x\to\pi}\frac{2}{-\cos x} = 2$$

**3**

次の積分をせよ。(5 点 ×2)

(1) $\displaystyle\int\left(1-\frac{1}{x}\right)^3\frac{1}{x^2}dx$
解答

$1-\frac{1}{x} = t$ とする。$\frac{1}{x^2}dx = dt$ となるから
$$\int\left(1-\frac{1}{x}\right)^3\frac{1}{x^2}dx = \int t^3dt = \frac{1}{4}t^4 + C = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{x}\right)^4 + C$$
積分定数がないときは４点。
$x$ に戻していないとき３点。

(2) $\displaystyle\int_1^e(x^2+1)\log x dx$
解答

$$\int_1^e(x^2+1)\log x dx = [(\frac{1}{3}x^3+x)\log x]_1^e - \int_1^e(\frac{1}{3}x^3+x)\frac{1}{x}dx$$
$$= (\frac{1}{3}e^3+e) - \int_1^e(\frac{1}{3}x^2+1)dx$$
$$= \frac{1}{3}e^3+e-[\frac{1}{9}x^3+x]_1^e$$
$$= \frac{1}{3}e^3+e-\frac{1}{9}e^3-e+\frac{1}{9}+1$$
$$= \frac{2}{9}e^3+\frac{10}{9}$$

| 科目 | 数学・応用数学 | 分野 | 微分積分 | ２枚目 / ２枚中 | 受験番号 | | 小計 | | 合計 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

## 4

関数 $f(x,y) = \mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{x-y}{x+y}$ を偏微分して $\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$ と $\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$ をもとめよ。(10 点)

解答

$$f_x(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x-y}{x+y})^2}}\frac{x+y-(x-y)}{(x+y)^2}(\text{ここまでで 3 点})$$
$$= \frac{2y}{(x+y)\sqrt{(x+y)^2-(x-y)^2}}$$
$$= \frac{1}{x+y}\sqrt{\frac{y}{x}}$$
$$f_y(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x-y}{x+y})^2}}\frac{-(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2}(\text{ここまでで 3 点})$$
$$= \frac{-2x}{(x+y)\sqrt{(x+y)^2-(x-y)^2}}$$
$$= \frac{-1}{x+y}\sqrt{\frac{x}{y}}$$

片方正解の場合 5 点。

## 5

不等式 $x \geqq 0$、$0 \leqq y \leqq \sqrt{3}x$、$x^2+y^2 \leqq 4$ のすべて満たす領域を $D$ とする。

二重積分 $\iint_D (x+y)dxdy$ を求めよ。(10 点)

解答

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ により極座標に変換すると範囲は $0 \leqq r \leqq 2$, $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}$ となる。よって

$$\iint_D (x+y)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\left\{\int_0^2 r^2(\cos\theta+\sin\theta)dr\right\}d\theta(\text{ここまでで 3 点})$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}}\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^2(\cos\theta+\sin\theta)d\theta$$
$$= \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\cos\theta+\sin\theta)d\theta(\text{ここまでで 6 点})$$
$$= \frac{8}{3}[\sin\theta-\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$= \frac{8}{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}+1)$$
$$= \frac{4}{3}(\sqrt{3}+1)$$

| 科目 | 数学・応用数学 | 分野 | 線形代数 | １枚目 / ２枚中 | 受験番号 | | 小計 | | 合計 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

# 1

(1)

連立方程式

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ 3x + ky - z = 0 \\ 2x + 4y + z = 0 \end{cases}$$

が $x = y = z = 0$ 以外の解をもつような $k$ の値を求めよ。(S 系 3 点 K 系 5 点)

解答

行列式 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & k & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ が 0 になればよい。よって $|A| = k + 48 - 4 - 8k - 6 + 4 = 0$ ならばよいから、$k = 6$ である。

(2)

$k$ の値が (1) で求めたものであるとき、(1) の方程式の解を求めよ。(S 系 4 点 K 系 5 点)

解答

拡大係数行列は $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ となるこれを行基本変形していくと

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{pmatrix}$ となる。これは方程式 $\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ に相当する。よって $z = 0$ となり $x, y$ は $x + 2y = 0$ を満たしていれば何でもよいから次のような解になる。

$t$ を任意の定数として $\begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$

任意定数は別の文字でもよい。

| 科目 | 数学・応用数学 | 分野 | 線形代数 | ２枚目 / ２枚中 | 受験番号 | | 小計 | | 合計 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

**2**

行列 $\begin{pmatrix} -4 & 7 \\ -14 & 17 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。(S 系 8 点 K 系 10 点)

解答

固有方程式は $\lambda^2 - 13\lambda - 30 = (\lambda - 3)(\lambda - 10) = 0$ となるので固有値は $\lambda = 3, 10$ である。(ここまで S 系 4 点 K 系 5 点)

$\lambda = 3$ のときの固有ベクトルは

$\begin{pmatrix} -7 & 7 \\ -14 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より $-7x + 7y = 0$

$c_1$ を 0 以外の任意の数として $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が固有ベクトル。

$\lambda = 10$ のときの固有ベクトルは

$\begin{pmatrix} -14 & 7 \\ -14 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より $-14x + 7y = 0$

$c_2$ を 0 以外の任意の数として $c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ が固有ベクトル。

固有ベクトルの片方のみ正解のときは S 系 6 点、K 系 7 点。

| 科目 | 数学・応用数学 | 分野 | 微分方程式 | １枚目 / ２枚中 | 受験番号 | | 小計 | | 合計 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

# 1

次の微分方程式を解け。 (S 系 4 点 $\times$ 2, K 系 5 点 $\times 2$)

(1) $(x^2+1)y'-2xy+2x=0$

解答

対応する斉次方程式は $(x^2+1)y'-2xy=0$, これを変形すると

$\dfrac{y'}{y}=\dfrac{2x}{x^2+1}$, これを積分して $\displaystyle\int\frac{1}{y}dy=\int\frac{2x}{x^2+1}dx$

$\log|y|=\log|x^2+1|+c_1$

$y=\pm e^{c_1}(x^2+1)$

非斉次の解を $y=u(x^2+1)$ とすると $y'=u'(x^2+1)+2ux$ これを微分方程式に代入すると

$(x^2+1)(u'(x^2+1)+2ux)-2ux(x^2+1)+2x=0$

$(x^2+1)^2u'+2x=0$

$u'=\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

よって $u=\displaystyle\int\frac{-2x}{(x^2+1)^2}dx$

$t=x^2+1$ とすると $dt=2xdx$ となるので $u=-\displaystyle\int\frac{1}{t^2}dt=\frac{1}{t}+c_2=\frac{1}{x^2+1}+c_2$

$y=(\frac{1}{x^2+1}+c_2)(x^2+1)=1+c_2(x^2+1)$ が一般解となる。($c_1,c_2$ は任意の定数)

(2) $y''+3y'=10\sin x$

解答

特性方程式は $\lambda^2+3\lambda=0$ 特性解は $\lambda=0,-3$ である。

よって斉次の一般解は $y=c_1+c_2e^{-3x}$ である。特殊解を $y=A\sin x+B\cos x$ と予想すると

$y'=A\cos x-B\sin x$, $y''=-A\sin x-B\cos x$ となるのでこれを微分方程式に代入すると

$-A\sin x-B\cos x+3A\cos x-3B\sin x=10\sin x$

$A,B$ の連立方程式 $\begin{cases}-A-3B=10\\-B+3A=0\end{cases}$ を解くと $A=-1,B=-3$ よって非斉次の一般解は $c_1+c_2e^{-3x}-\sin x-3\cos x$

($c_1,c_2$ は任意の定数。)

| 科目 | 数学・応用数学 | 分野 | 微分方程式 | ２枚目 / ２枚中 | 受験番号 | | 小計 | | 合計 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

**2**

次の微分方程式の特殊解を与えられた初期条件の下でもとめよ。

(1) $y' + y\sin 2x = 0$ ($x = 0$ のとき $y = 2e$)(S 系 4 点,K 系 5 点)
解答
変形して $\dfrac{y'}{y} = -\sin 2x$
積分して、$\log|y| = \frac{1}{2}\cos 2x + c_1$
$\pm e^{c_1} = c_2$ として一般解は $y = c_2 e^{\frac{1}{2}\cos 2x}$
となる。(ここまで S 系 2 点 K 系 3 点)
初期条件 $x = 0, y = 2e$ を代入すると $2e = c_2\sqrt{e}$, よって $c_2 = 2\sqrt{e}$
特殊解は $y = 2e^{\frac{1}{2}(1+\cos 2x)}$
(2) $y'' - 2y' + 10y = 0$ ($x = 0$ のとき $y = 2$, $y' = 2$)(S 系 3 点, K 系 5 点)
解答
特性方程式は $\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$ 特性解は $\lambda = 1 \pm 3i$, よって一般解は $y = e^x(c_1\sin 3x + c_2\cos 3x)$
となる。(ここまで S 系 2 点 K 系 3 点)
これを微分して $y' = e^x((c_1 - 3c_2)\sin 3x + (3c_1 + c_2)\cos 3x)$
条件を代入すると $\begin{cases} 2 = c_2 \\ 2 = 3c_1 + c_2 \end{cases}$
この方程式の解は $c_1 = 0, c_2 = 2$ よって特殊解は $y = 2e^x\cos 3x$

平成２７年度　岐阜工業高等専門学校専攻科　学力検査による入学者選抜（後期）

| 科目 | 数学・応用数学 | 分野 | 確率と統計 | １枚目／１枚中 | 受検番号 | | 小計 | | 合計 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

次の$\boxed{1}$と$\boxed{2}$を両方とも解答せよ．（配点［Ｓ系］：$\boxed{1}$ 8点$\boxed{2}$ 7点；　［Ｋ系］：$\boxed{1}$ 10点$\boxed{2}$ 10点）

$\boxed{1}$　1枚の硬貨を100回投げるとき，表の出る回数を X とする．確率$P(46 \leq X \leq 54)$を求めよ．

ただし，数値　$\Phi(0.9) = \int_{-\infty}^{0.9} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0.8159$　を利用すること．

$\boxed{2}$　［正規分布表から得られる数値 1.65, 1.96, 2.33, 2.58 のいずれかを使用すること．］
正規母集団$N(\mu, 20^2)$から無作為抽出した大きさ 100 の標本の平均値が 77.0 であった．$\mu$の 99%信頼区間を求めよ．ただし，答案は標本分布から推定の計算に至る過程が分かる記述にすること．

$\boxed{1}$　$X$は２項分布$B(100,\ 1/2)$に従う．　【Ｓ：２；Ｋ：２】

$\mu = 100 \times 1/2 = 50,\quad \sigma^2 = 100 \times 1/2 \times (1 - 1/2) = 25,\quad \sigma = \sqrt{25} = 5$　【Ｓ：２；Ｋ：３】

$n = 100$ は大きいので，$X$は正規分布 $N(50,\ 25)$ に従うと近似できる．

$Z = \frac{X-50}{\sqrt{25}} = \frac{X-50}{5}$について　　$P(46 \leq X \leq 54) \cong P(46 - 0.5 \leq X \leq 54 + 0.5)$

$= P\left(\frac{46 - 0.5 - 50}{5} \leq Z \leq \frac{54 + 0.5 - 50}{5}\right) = P\left(\frac{-4.5}{5} \leq Z \leq \frac{4.5}{5}\right)$　【Ｓ：２；Ｋ：３】

$= P(-0.9 \leq Z \leq 0.9) = \int_{-0.9}^{0.9} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \int_{-\infty}^{0.9} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \int_{-\infty}^{-0.9} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

$= \Phi(0.9) - \left(1 - \Phi(0.9)\right) = 0.8159 - (1 - 0.8159) = 0.6318$　【Ｓ：２；Ｋ：２】

$\boxed{2}$　標本の大きさ $n = 100$，母分散 $\sigma^2 = 400$，

標本平均$\bar{X}$は正規分布$N\left(\mu, \frac{400}{100}\right) = N(\mu, 4)$に従うので，　【Ｓ：２；Ｋ：３】

$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{4}} = \frac{\bar{X} - \mu}{2}$について正規分布表によって，

$$P\left(-2.58 \leq \frac{\bar{X} - \mu}{2} \leq 2.58\right) = 0.99$$　【Ｓ：２；Ｋ：３】

が成り立つ．括弧内の不等式を変形し，標本平均の実現値 $\bar{x} = 77.0$ を用いると，母平均 $\mu$ の 99%信頼区間は

$$77.0 - 2.58 \times 2 \leq \mu \leq 77.0 + 2.58 \times 2$$

$\therefore 77.0 - 5.16 \leq \mu \leq 77.0 + 5.16$　　$\therefore 71.84 \leq \mu \leq 82.16$　【Ｓ：３；Ｋ：４】

となる．

平成２７年度　岐阜工業高等専門学校専攻科　学力検査による入学者選抜（後期）

| 科目 | 数学・応用数学 | 分野 | ベクトル解析 | 1枚目 / 1枚中 | 受検番号 | | 小計 | | 合計 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

次の[1]と[2]を両方とも解答せよ．（配点［Ｓ系］：[1] 8点[2] 7点；　［Ｋ系］：[1] 10点[2] 10点）

[1] (a)　スカラー場 $\varphi = \sin(2x+y) + e^{y+2z}$ について，その勾配 $\nabla\varphi$ とラプラシアン $\nabla^2\varphi$を求めよ．

(b)　次のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の発散 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ を求めよ．$\boldsymbol{A} = xy^2\boldsymbol{i} + \log(y^2+z^2)\,\boldsymbol{j} + \sin(xz)\,\boldsymbol{k}$

(c)　次のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の回転 $\nabla\times\boldsymbol{A}$ を求めよ．$\boldsymbol{A} = e^x\boldsymbol{i} + e^{xy}\boldsymbol{j} + e^{xyz}\boldsymbol{k}$

[2]　ベクトル場 $\boldsymbol{A} = -8x^2z\boldsymbol{i} + (x^2+2y)\boldsymbol{j} + 7yz\boldsymbol{k}$ について，次の曲線 $C$ に沿っての線積分

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$$

を求めよ．$C$ は曲線 $\boldsymbol{r} = t^2\boldsymbol{i} + t^3\boldsymbol{j} + t\,\boldsymbol{k}\ \ (0 \le t \le 1)$

**答案作成上の注意．スカラーとベクトルは明確に区別すること．**

[1]

(a)　$\nabla\varphi = \nabla\{\sin(2x+y) + e^{y+2z}\} = 2\cos(2x+y)\,\boldsymbol{i} + (\cos(2x+y) + e^{y+2z})\boldsymbol{j} + 2e^{y+2z}\,\boldsymbol{k}$

$$\nabla^2\varphi = \nabla\cdot(\nabla\varphi) = -4\sin(2x+y) + (-\sin(2x+y) + e^{y+2z}) + 4e^{y+2z}$$
$$= 5(e^{y+2z} - \sin(2x+y))$$

【Ｓ：４；　Ｋ：４】

(b)　$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \dfrac{\partial}{\partial x}(xy^2) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\log(y^2+z^2)\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}(\sin xz) = y^2 + \dfrac{2y}{y^2+z^2} + x\cos(xz)$

【Ｓ：２；　Ｋ：３】

(c)　$\nabla\times\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ e^x & e^{xy} & e^{xyz} \end{vmatrix} = xze^{xyz}\boldsymbol{i} - yze^{xyz}\boldsymbol{j} + ye^{xy}\boldsymbol{k}$

【Ｓ：２；　Ｋ：３】

[2]　線分$C$ に沿って，$\boldsymbol{A} = -8t^5\boldsymbol{i} + (t^4+2t^3)\boldsymbol{j} + 7t^4\boldsymbol{k}$

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = 2t\,\boldsymbol{i} + 3t^2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

【Ｓ：２；　Ｋ：２】

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_C \boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}dt = \int_0^1(-16t^6 + 3t^6 + 6t^5 + 7t^4)dt = \int_0^1(-13t^6 + 6t^5 + 7t^4)dt$$

【Ｓ：３；　Ｋ：４】

$$= \left[-\frac{13}{7}t^7 + t^6 + \frac{7}{5}t^5\right]_0^1 = \frac{-65+35+49}{35} = \frac{19}{35}$$

【Ｓ：２；　Ｋ：４】

平成２７年度　岐阜工業高等専門学校専攻科　学力検査による入学者選抜（後期）

| 科目 | 数学・応用数学 | 分野 | 複素関数 | 1枚目 / 1枚中 | 受検番号 | | 小計 | | 合計 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

次の$\boxed{1}$と$\boxed{2}$を両方とも解答せよ．(配点［Ｓ系］：$\boxed{1}$ 8点$\boxed{2}$ 7点；　［Ｋ系］：$\boxed{1}$ 10点$\boxed{2}$ 10点)

$\boxed{1}$　次の関数(1)は正則であることを確かめ，導関数を求めよ．　(1)　$w = (3x^2 - 3y^2 - y) + (6xy + x)i$

また，次の関数(2)は正則であるか．　　(2)　$w = x^2 + yi$

**答案作成上の注意．コーシー・リーマンの方程式を利用すること．**

$\boxed{2}$　次の積分(1)(2)を求めよ．

(1)　$\displaystyle\int_C \frac{ze^{\pi z}}{z^2+1}dz \quad C: |z+i| = 1$　　　(2)　$\displaystyle\int_C \frac{z+2}{(z+1)^2(z-1)}dz \quad C: |z+1| = 1$

$\boxed{1}$ $w = u + iv$　について

(1)　$u = 3x^2 - 3y^2 - y \quad v = 6xy + x$

$u_x = 6x \qquad v_x = 6y + 1$

$u_y = -6y - 1 \qquad v_y = 6x$　　【Ｓ：２；Ｋ：３】

$\therefore u_x = v_y \;\; v_x = -u_y$　よって$w$は正則である．　【Ｓ：２；Ｋ：３】

導関数は$f'(z) = u_x + iv_x = 6x + (6y+1)i = 6z + i$である．【Ｓ：２；Ｋ：２】

(2)　$u = x^2 \quad v = y$

$u_x = 2x \qquad v_y = 1$

$\therefore u_x \neq v_y$　であるから，$w$は正則でない．　【Ｓ：２；Ｋ：２】

$\boxed{2}$ 被積分関数を$f(z)$とする．

(1) 点 $z = -i$ は１位の極であって円$C$ の内部にあり，点 $z = i$ は円$C$ の外部にある．

$$\mathrm{Res}[f, -i] = \lim_{z \to -i}(z+i)f(z) = \frac{-ie^{-i\pi}}{-2i} = -\frac{1}{2}$$

ゆえに，留数定理によって$\displaystyle\int_C \frac{ze^{\pi z}}{(z+i)(z-i)}dz = 2\pi i \mathrm{Res}[f, -i] = 2\pi i\left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi i$

【Ｓ：３；Ｋ：５】

(2) 点 $z = -1$ は２位の極であって円$C$ の内部にあり，点 $z = 1$ は円$C$ の外部にある．

$$\mathrm{Res}[f, -1] = \lim_{z \to -1}\frac{d}{dz}\{(z+1)^2 f(z)\} = \lim_{z \to -1}\frac{d}{dz}\left(\frac{z+2}{z-1}\right) = \lim_{z \to -1}\frac{(z-1)-(z+2)}{(z-1)^2} = \frac{-3}{4}$$

ゆえに，留数定理によって$\displaystyle\int_C \frac{z+2}{(z+1)^2(z-1)}dz = 2\pi i \mathrm{Res}[f, -1] = -\frac{3}{2}\pi i$　　【Ｓ：４；Ｋ：５】

$\boxed{2}$　【別解】(1) 点 $z = -i$ は１位の極であって円$C$ の内部にあり，点 $z = i$ は円$C$ の外部にある．

コーシーの積分表示より

$$\int_C \frac{ze^{\pi z}}{(z+i)(z-i)}dz = \int_{C_1} \frac{1}{z+i}\left(\frac{ze^{\pi z}}{z-i}\right)dz = 2\pi i \frac{-ie^{-i\pi}}{-2i} = 2\pi i\left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi i$$　【Ｓ：３；Ｋ：５】

(2) 点 $z = -1$ は２位の極であって円$C$ の内部にあり，点 $z = 1$ は円$C$ の外部にある．

コーシーの積分表示より

$$\int_C \frac{z+2}{(z+1)^2(z-1)}dz = \frac{2\pi i}{1!}\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{z+2}{z-1}\right)\right]_{z=-1} = 2\pi i\left[\frac{z-1-(z+2)}{(z-1)^2}\right]_{z=-1} = -\frac{3}{2}\pi i$$　【Ｓ：４；Ｋ：５】

平成２７年度　岐阜工業高等専門学校専攻科　学力検査による入学者選抜（後期）

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 科目 | 数学・応用数学 | 分野 | フーリエ級数・ラプラス変換 | １枚目 / １枚中 | 受検番号 | | 小計 | | 合計 |

次の$\boxed{1}$と$\boxed{2}$を両方とも解答せよ．(配点［Ｓ系］：$\boxed{1}$ 8 点$\boxed{2}$ 7 点；　［Ｋ系］：$\boxed{1}$ 10 点$\boxed{2}$ 10 点)

$\boxed{1}$　ラプラス変換を利用して，次の微分方程式(1)(2)を［　］内の初期条件のもとで解け．ただし $\mathcal{L}\,y(t) = Y(s)$ とする．

(1)　$y' - 2y = e^{t}$　$[\,y(0) = 1]$

(2)　$y'' - 4y' + 3y = 0$　$[\,y(0) = 1,\ \ y'(0) = 3\,]$

$\boxed{2}$　周期2πの関数 $f(x) = 3\ \ (0 \le x \le \pi),\ \ -3\ \ (\pi \le x \le 2\pi)$ のフーリエ級数を求めよ．

ここで，$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ の形になると分かっているものとして，係数$b_n$を求め，そして，さらに$f(x)$を具体的に０でない３項まで表せ．

$\boxed{1}$　(1)　$\mathcal{L}\,(y' - 2y) = sY(s) - y(0) - 2Y(s) = (s-2)Y(s) - 1$

$$\mathcal{L}(e^t) = \frac{1}{s-1},\qquad \therefore\ (s-2)Y(s) - 1 = \frac{1}{s-1}\qquad \therefore\ (s-2)Y(s) = 1 + \frac{1}{s-1} = \frac{s}{s-1}$$

$$\therefore\ Y(s) = \frac{s}{(s-2)(s-1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-1}$$

【Ｓ：２；Ｋ：３】

$\therefore\ s = A(s-1) + B(s-2)$　　$s = 2$ のとき $A = 2$，$s = 1$ のとき $1 = -B$で　$B = -1$

$$\therefore\ Y(s) = \frac{2}{s-2} - \frac{1}{s-1}$$

【Ｓ：１；Ｋ：２】

$$\therefore y(t) = \mathcal{L}^{-1}Y(s) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-2} - \frac{1}{s-1}\right\} = 2e^{2t} - e^{t}$$

【Ｓ：２；Ｋ：２】

(2)　$\mathcal{L}\,(y'' - 4y' + 3y) = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 4\big(sY(s) - y(0)\big) + 3Y(s)$

$$= (s^2 - 4s + 3)Y(s) - s + 1 = (s-3)(s-1)Y(s) - s + 1 = 0$$

$$\therefore\ (s-3)(s-1)Y(s) = s - 1\qquad \therefore\ Y(s) = \frac{1}{s-3}$$

【Ｓ：２；Ｋ：２】

$$\therefore y(t) = \mathcal{L}^{-1}Y(s) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} = e^{3t}$$

【Ｓ：１；Ｋ：１】

$\boxed{2}$

周期関数として奇関数であるから

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 3\sin nx\,dx = \frac{6}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{6(1-\cos n\pi)}{n\pi}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{12}{n\pi} & (n = 2k-1) \\ 0 & (n = 2k) \end{cases}$$

【Ｓ：５；Ｋ：７】

$$\therefore f(x) \sim \frac{12}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)}\sin(2k-1)x$$

$$= \frac{12}{\pi}\sin x + \frac{4}{\pi}\sin 3x + \frac{12}{5\pi}\sin 5x + \cdots$$

【Ｓ：２；Ｋ：３】