科目	数学	分野	微分積分	1枚目 / 3枚中	受験番号		小計		合計	

1

次の関数を微分せよ。(5 点 × 2)

(1) $f(x) = \mathrm{Sin}^{-1}\sqrt{1-x^2}(x > 0$ とする)

解答

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} \times \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(2) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

解答

$$f'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

2

次の積分をせよ。(5 点 × 2)

(1) $\displaystyle\int x^2(x^3+1)^5 dx$

解答

$x^3+1=t$ とすると $3x^2dx = dt$ となり、$\displaystyle\int x^2(x^3+1)^5dx = \int \frac{1}{3}t^5 dt$(ここまでで 2 点)

$$= \frac{t^6}{18} + C = \frac{(x^3+1)^6}{18} + C$$

積分定数がない時は 4 点。

(2) $\displaystyle\int_1^e x^5 \log x dx$

解答

$$\int_1^e x^5 \log x dx = \left[\frac{1}{6}x^6 \log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{6}\cdot x^6 \cdot \frac{1}{x}dx \text{(ここまでで 2 点)}$$

$$= \frac{1}{6}e^6 - \frac{1}{6}\int_1^e x^5 dx = \frac{1}{6}e^6 - \frac{1}{36}[x^6]_1^e = \frac{5}{36}e^6 + \frac{1}{36}$$

平成２８年度　岐阜工業高等専門学校 専攻科　学力検査による入学者選抜（前期）

科目	数学	分野	微分積分	２枚目 / ３枚中	受験番号		小計		合計	

3

極限値 $\lim_{x\to 0}\dfrac{x\cos x - e^x}{x}$ を求めよ。(5 点)

解答

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x - e^x}{1} = -1$$

4

$f(x,y)=\cos(x^2-y^2)$ を 2 回偏微分して $f_{xx}(x,y), f_{xy}(x,y), f_{yy}(x,y)$ を求めよ。(15 点)

解答

$f_x = -2x\sin(x^2-y^2)$,
$f_y = 2y\sin(x^2-y^2)$
どちらか片方で 3 点両方で 6 点。
$f_{xx} = -2\sin(x^2-y^2) - 4x^2\cos(x^2-y^2)$,
$f_{xy} = 4xy\cos(x^2-y^2)$
$f_{yy} = 2\sin(x^2-y^2) - 4y^2\cos(x^2-y^2)$
それぞれ正解なら 3 点。
f_x, f_y が明確に書かれていない場合は f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} が正しければ f_x, f_y も正しかったとみなす。

5

次の重積分を求めよ。(10 点 ×2)

(1) $\displaystyle\iint_D \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$, D は円 $x^2+y^2=\pi^2$ の内部

解答

極座標に変換すると $\displaystyle\iint_D r\sin r dr d\theta$, D は $0 \leqq r \leqq \pi, 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の範囲となる。よって

$$\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\pi} r\sin r dr\right\}d\theta(\text{ここまでで 3 点})$$

$$=\int_0^{2\pi}\left\{[-r\cos r]_o^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos r dr\right\}d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left\{\pi+[\sin r]_0^{\pi}\right\}d\theta=\int_0^{2\pi}\pi d\theta(\text{ここまでで 7 点})$$

$$=2\pi^2$$

(2) $\displaystyle\iint_D (xy+y^2-x^2)dxdy$ D は $1 \leqq x \leqq 2, 1 \leqq y \leqq 2$ で表される領域

解答

$$\int_1^2\left\{\int_1^2(xy+y^2-x^2)dx\right\}dy=\int_1^2\left[\frac{1}{2}x^2y+xy^2-\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 dy$$

$$=\int_1^2(y^2+\frac{3}{2}y-\frac{7}{3})dy(\text{ここまでで 5 点})$$

$$=\left[\frac{1}{3}y^3+\frac{3}{4}y^2-\frac{7}{3}y\right]_1^2=\frac{9}{4}$$

科目	数学	分野	線形代数	1枚目／2枚中	受験番号		小計		合計	

1

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & k \end{pmatrix}$ の行列式 $|A|$ を求めよ。(5 点)

解答

$|A| = 1\cdot 1\cdot k + 2\cdot(-1)\cdot 1 + 0\cdot 0\cdot 0 - 1\cdot 1\cdot 0 - 0\cdot 2\cdot k - 1\cdot(-1)\cdot 0 = k-2$
よって行列式は $k-2$

$k=3$ のときに A の逆行列を求めよ。(5 点)

解答

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

よって逆行列は $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -6 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

科目	数学	分野	線形代数	２枚目／２枚中	受験番号		小計		合計	

2

行列 $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$ で表される一次変換の固有値と固有ベクトルを求めよ。(10 点)

解答

固有方程式 $\begin{vmatrix} 8-\lambda & 1 \\ -4 & 12-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)(12-\lambda)+4 = \lambda^2 - 20\lambda + 100 = (\lambda-10)^2 = 0$ の解は
$\lambda = 10$

つまり固有値は 10 となる。(ここまでで 5 点)

固有ベクトルを $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると

$\begin{pmatrix} 8-10 & 1 \\ -4 & 12-10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

よって $-2x + y = 0$ を満たせばよい。

$x = c$ とすると $y = 2c$ となるから固有ベクトルは $c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ となる。c は 0 以外の任意の定数。

科目	数学	分野	微分方程式	１枚目 / ２枚中	受験番号		小計		合計	

1

次の微分方程式の一般解を求めよ。(5 点 ×2)

(1) $xy' + y = x^2$

解答

まず $xy' + y = 0$ を解く。移項して y で割ると
$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x}$, 積分して $\displaystyle\int \frac{1}{y}dy = -\int \frac{1}{x}dx$
$\log|y| = -\log|x| + c_1$
$\log|xy| = c_1$
$xy = \pm e^{c_1}$ となる。
$y = \frac{u}{x}$ とする。$y' = \frac{u'x-u}{x^2}$
元の方程式 $xy' + y = x^2$ に代入すると
$\frac{u'x-u}{x} + \frac{u}{x} = x^2$
$u'x - u + u = x^2$
$u' = x^2$
$u = \frac{1}{3}x^3 + c$
解は $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{c}{x}$,c は任意の定数。

(2) $4y'' + y = 8 + x^2$

解答

特性方程式は $4\lambda^2 + 1 = 0$ これを解いて $\lambda = \pm\frac{i}{2}$
よって斉次の一般解は $y = c_1 \sin\frac{x}{2} + c_2 \cos\frac{x}{2}$ となる。
特殊解を $y = ax^2 + bx + c$ とすると $y' = 2ax + b$, $y'' = 2a$ これを方程式に代入して
$8a + ax^2 + bx + c = 8 + x^2$

連立方程式 $\begin{cases} 8a + c = 8 \\ b = 0 \\ a = 1 \end{cases}$ となる。

これより $a = 1, b = 0, c = 0$ 特殊解は $y = x^2$
よって一般解は $y = c_1 \sin\frac{x}{2} + c_2 \cos\frac{x}{2} + x^2$ となる。c_1, c_2 は任意の定数。
斉次の一般解、特殊解の一方のみ正解のときは 3 点。

科目	数学	分野	微分方程式	２枚目／２枚中	受験番号		小計		合計	

2

次の微分方程式を与えられた初期条件の下で解け。(5 点 ×2)

(1) $y'y = \sqrt{x}$ 　　($x = 1$ のとき $y = 1$)

解答

方程式を積分して $\int y dy = \int \sqrt{x} dx$,

$\frac{1}{2}y^2 = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$

初期条件を代入すると $\frac{1}{2} = \frac{2}{3} + c$,

$c = -\frac{1}{6}$

よって解は $y^2 = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}$

(2) $y'' - \frac{5}{2}y' + y = 0$ 　　($x = 0$ のとき $y = -1, y' = -\frac{7}{2}$)

解答

特性方程式は $\lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + 1 = 0$ これを解くと $\lambda = 2, \frac{1}{2}$

よって一般解は $y = c_1e^{2x} + c_2e^{\frac{1}{2}x}$, $y' = 2c_1e^{2x} + \frac{1}{2}c_2e^{\frac{1}{2}x}$

初期条件を代入すると

$$\begin{cases} -1 = c_1 + c_2 \\ -\frac{7}{2} = 2c_1 + \frac{1}{2}c_2 \end{cases}$$

この連立方程式を解くと $c_1 = -2, c_2 = 1$

よって解は $y = -2e^{2x} + e^{\frac{1}{2}x}$

平成２８年度　岐阜工業高等専門学校専攻科　学力検査による入学者選抜（前期）

科目	数学	分野	応用数学	１枚目 / １枚中	受検番号		小計		合計	

1　スカラー場$\varphi = e^{xyz}$，ベクトル場$\boldsymbol{A} = x^2y\boldsymbol{i} + xy^2\boldsymbol{j} + xyz\boldsymbol{k}$ について以下のものを求めよ．（10 点）

(1)$grad\varphi$　(2)$div\boldsymbol{A}$　(3)$rot\boldsymbol{A}$　(4)$\nabla\cdot(\nabla\varphi + \boldsymbol{A})$

(1)$grad\varphi = yze^{xyz}\boldsymbol{i} + xze^{xyz}\boldsymbol{j} + xye^{xyz}\boldsymbol{k}$

(+3)

(2)$div\boldsymbol{A} = 2xy + 2xy + xy = 5xy$

(+2)

(3)$rot\boldsymbol{A} = xz\boldsymbol{i} - yz\boldsymbol{j} + (y^2 - x^2)\boldsymbol{k}$

(+3)

(4)$\nabla\cdot(\nabla\varphi + \boldsymbol{A}) = \nabla^2\varphi + \nabla\cdot\boldsymbol{A} = (y^2z^2e^{xyz} + x^2z^2e^{xyz} + x^2y^2e^{xyz}) + 5xy$

$= (x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2)e^{xyz} + 5xy$

(+2)

2　C: $\boldsymbol{r} = \cos t\,\boldsymbol{i} + \sin t\,\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}\ (0 \le t \le \frac{\pi}{2})$ で表される曲線がある．（10 点）

(1)この曲線の弧長を求めよ．

(2)ベクトル場$\boldsymbol{A} = 2y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + \sin^2 z\boldsymbol{k}$ を曲線 C に沿って線積分せよ．

(1) $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = -\sin t\,\boldsymbol{i} + \cos t\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$　(+2)，　$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$　(+1)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}dt = \left[\sqrt{2}t\right]_0^{\pi/2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$$

(+2)

(2)曲線 C に沿って$\mathbf{A} = 2\mathrm{sin}t\boldsymbol{i} + \mathrm{cos}t\boldsymbol{j} + \sin^2 t\boldsymbol{k}$　(+2)

よって

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\mathrm{sin}t\boldsymbol{i} + \mathrm{cos}t\boldsymbol{j} + \sin^2 t\boldsymbol{k})\cdot(-\sin t\,\boldsymbol{i} + \cos t\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})dt$$

(+1)

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\,dt = \left[\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\pi/2} = 0$$

(+2)