

科目	数学	分野	微分積分	1枚目	受験 番号	小計	合計
				3枚中			

1

次の関数を微分せよ。(5点×2)

(1) $f(x) = x^2 e^{x^2}$

解答

$$f'(x) = 2xe^{x^2} + 2x^3e^{x^2} = 2x(x^2 + 1)e^{x^2}$$

(2) $f(x) = x \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{x}}$

解答

$$f'(x) = \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{2x\sqrt{x}} \right) = \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2(x+1)}$$

2

次の積分を求めよ。(5点×2)

(1) $\int x^3 \sqrt{x^4 + 1} dx$

解答

$x^4 + 1 = t$ とおくと $4x^3 dx = dt$ よって

$$\int x^3 \sqrt{x^4 + 1} dx = \int \frac{1}{4} t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{6} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{6} (x^4 + 1)^{\frac{3}{2}} + C$$

(2) $\int_{-1}^1 \frac{x}{(x+2)^2} dx$

解答

$t = x + 2$ とおくと $dx = dt$ 、 x に対応する t の範囲は $1 \leq t \leq 3$ となる。よって

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{(x+2)^2} dx = \int_1^3 \frac{t-2}{t^2} dt = \int_1^3 \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{t^2} \right) dt = \left[\log |t| + \frac{2}{t} \right]_1^3 = \log 3 - \frac{4}{3}$$

科目	数学	分野	微分積分	2枚目	受験 番号	小計	合計
				3枚中			

3

次の極限を求めよ。(5点)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{\log(x^2 + 1)}$$

解答

ロピタルの定理により

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{\log(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{2x}{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}$$

4

$f(x, y) = x \sin(x^2 + y^2)$ とする。二階偏導関数 f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} を求めよ。(15点)

解答

$$f_x = \sin(x^2 + y^2) + 2x^2 \cos(x^2 + y^2)$$

$$f_y = 2xy \cos(x^2 + y^2)$$

それぞれ正解なら3点ずつ。

$$f_{xx} = 6x \cos(x^2 + y^2) - 4x^3 \sin(x^2 + y^2)$$

$$f_{xy} = 2y \cos(x^2 + y^2) - 4x^2 y \sin(x^2 + y^2)$$

$$f_{yy} = 2x \cos(x^2 + y^2) - 4xy^2 \sin(x^2 + y^2)$$

正解ならそれぞれ3点ずつ。 f_x, f_y がはっきり分かるように書かれていないときは、 f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} が正解ならば f_x, f_y も正解とみなす。

科目	数学	分野	微分積分	3 枚目	受験 番号	小計	合計
				3 枚中			

5

次の重積分を求めよ。

(1)

$\iint_D x \log y dx dy$ を求めよ。D は $0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq e$ を満たす領域とする。(10 点)

解答

$$\iint_D x \log y dx dy = \int_0^1 \left\{ \int_1^e x \log y dy \right\} dx = \int_0^1 x [y \log y - y]_1^e dx = \int_0^1 x(e - e + 1) dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

2 重積分の内一回積分ができていれば 5 点

(2) 重積分 $\iint_D \frac{x+y}{x^2} dx dy$ を求めよ。D は 4 直線 $x \leq y \leq 2x, 1 \leq x+y \leq 2$ を満たす領域である。

(i) $\frac{y}{x} = u, x+y = v$ と変換したときのヤコビアン J を求めよ。(5 点)

解答

変形すると $x = \frac{v}{u+1}, y = \frac{uv}{u+1}$ となるからこれらを偏微分すると、

$$x_u = \frac{-v}{(u+1)^2}$$

$$x_v = \frac{1}{u+1}$$

$$y_u = \frac{v}{(u+1)^2}$$

$$y_v = \frac{u}{u+1}$$

$$\text{となるからヤコビアンは } J = \begin{vmatrix} \frac{-v}{(u+1)^2} & \frac{v}{(u+1)^2} \\ \frac{1}{u+1} & \frac{u}{u+1} \end{vmatrix} = \frac{-v}{(u+1)^2}$$

符号が異なる時も正解。

(ii) $\iint_D \frac{x+y}{x^2} dx dy$ を求めよ (5 点)

解答

$$\iint_D \frac{x+y}{x^2} dx dy = \int_1^2 \left\{ \int_1^{2v} \frac{(1+u)^2}{v^2} \cdot v \cdot \frac{v}{(u+1)^2} du \right\} dv = \int_1^2 [u]_1^{2v} dv = \int_1^2 1 dv = [v]_1^2 = 1$$

科目	数学	分野	線形代数	1枚目	受験 番号	小計	合計
				2枚中			

1

(1) 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ を求めよ。(5点)

解答

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 8 + 0 - 4 - 4 = 0$$

(2) 連立方程式 $\begin{cases} x + 2y + 4z = 7 \\ 2x + 4z = 6 \\ y + z = 2 \end{cases}$ を解け。(5点)

解答

拡大係数行列を行基本変形していくと $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -4 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ これは $x + 2z = 3, y + z = 2$ を意味する。よって t を任意の実数として

$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}$ が解となる。

科目	数学	分野	線形代数	2枚目	受験 番号	小計	合計
				2枚中			

2

行列 $\begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 13 & 18 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。(10点)

解答

固有方程式は $\begin{vmatrix} 15-\lambda & 16 \\ 13 & 18-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 33\lambda + 62 = (\lambda - 2)(\lambda - 31) = 0$ だから固有値は $\lambda = 2, 31$ である。(ここまで5点)

固有ベクトルは $\lambda = 2$ のときは $\begin{pmatrix} 13 & 16 \\ 13 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

つまり $13x + 16y = 0$ ならばよい。よって固有ベクトルは $c_1 \begin{pmatrix} 16 \\ -13 \end{pmatrix}$

c_1 は0以外の任意の定数。

$\lambda = 31$ のときは $\begin{pmatrix} -16 & 16 \\ 13 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

つまり $x - y = 0$ ならばよい。よって固有ベクトルは $c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c_2 は0以外の任意の定数。

固有値が正解で固有ベクトルが片方のみ正解のとき8点。固有値が片方のみ正解でその固有ベクトルが正解のとき5点。固有値が片方のみ正解で固有ベクトルが不正解のとき0点。

科目	数学	分野	微分方程式	1枚目	受験 番号	小計	合計
				2枚中			

1

次の微分方程式の一般解を求めよ。(5点×2)

$$(1) y' - 2y = 2x - 2x^2$$

解答

斉次方程式 $y' - 2y = 0$ を解くと $y' = 2y$

$$\frac{y'}{y} = 2$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2dx$$

$$\log|y| = 2x + c_1$$

$$y = c_2 e^{2x} \text{ (ここまでで2点)}$$

解を $y = ue^{2x}$ とすると $y' = u'e^{2x} + 2ue^{2x}$ これを方程式に代入して $u'e^{2x} + 2ue^{2x} - 2ue^{2x} = 2x - 2x^2$

$$u' = (2x - 2x^2)e^{-2x}$$

$$u = \int (2x - 2x^2)e^{-2x} dx = -(x - x^2)e^{-2x} + \int (1 - 2x)e^{-2x} dx = -(x - x^2)e^{-2x} - \frac{1}{2}(1 - 2x)e^{-2x} +$$

$$\frac{1}{2} \int (-2)e^{-2x} dx = -(x - x^2)e^{-2x} - \frac{1}{2}(1 - 2x)e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-2x} + c_3 = x^2e^{-2x} + c_3$$

$$\text{よって } y = ue^{2x} = x^2 + c_3e^{2x},$$

c_1, c_2, c_3 は任意の定数。

部分積分の一回目までできていれば3点、積分定数がないとき4点

$$(2) y'' + 2y' + 3y = 0$$

解答

特性方程式は $\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$ これを解いて $\lambda = -1 \pm \sqrt{2}i$

よって一般解は $y = e^{-x}(c_1 \sin \sqrt{2}x + c_2 \cos \sqrt{2}x)$

c_1, c_2 は任意の定数。

科目	数学	分野	微分方程式	2枚目	受験 番号	小計	合計
				2枚中			

2

次の微分方程式の与えられた初期条件の下で特殊解を求めよ。(5点×2)

(1) $(1+x^2)yy' = 1$, ($x=0$ のとき $y=2$)

解答

$$yy' = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\int y dy = \int \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = \text{Tan}^{-1}x + c$$

ここまでで3点。

初期条件を代入すると $2 = c$ よって $y = \sqrt{2\text{Tan}^{-1}x + 4}$

(2) $y'' - 4y = 5e^x$ ($x=0$ のとき $y = \frac{-2}{3}, y' = \frac{13}{3}$)

解答

特性方程式は $\lambda^2 - 4 = 0$

これを解いて $\lambda = \pm 2$ よって斉次方程式の解は $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$ 特殊解の一つを $y = ae^x$ とする。

微分方程式に代入すると $ae^x - 4ae^x = 5e^x$ これより $a = \frac{-5}{3}$ 一般解は $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} - \frac{5}{3}e^x$ となる。(ここまでで3点)

微分すると $y' = 2c_1e^{2x} - 2c_2e^{-2x} - \frac{5}{3}e^x$ となる。

初期条件を代入すると

$$\begin{cases} \frac{-2}{3} = c_1 + c_2 - \frac{5}{3} \\ \frac{13}{3} = 2c_1 - 2c_2 - \frac{5}{3} \end{cases} \quad \text{この連立方程式を解いて } c_1 = 2, c_2 = -1 \text{ よって特殊解は}$$

$y = 2e^{2x} - e^{-2x} - \frac{5}{3}e^x$ となる。

科目	数学	分野	応用数学	1 枚目	受検 番号	小 計	合 計
				1 枚中			

1 スカラー場 $\varphi = \log(x+y)(y+z)$, ベクトル場 $\mathbf{A} = xyz^3\mathbf{i} - 2x^2z^3\mathbf{j} + 2yz^4\mathbf{k}$ について以下のものを求めよ. (10 点)

(1) $\text{grad}\varphi$ (2) $\text{div}\mathbf{A}$ (3) $\text{rot}\mathbf{A}$ (4) $\nabla \times (\nabla\varphi + \mathbf{A})$

$$(1) \text{grad}\varphi = \frac{1}{x+y}\mathbf{i} + \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z}\right)\mathbf{j} + \frac{1}{y+z}\mathbf{k}$$

(+3)

$$(2) \text{div}\mathbf{A} = yz^3 + 8yz^3 = 9yz^3$$

(+2)

$$(3) \text{rot}\mathbf{A} = (2z^4 + 6x^2z^2)\mathbf{i} + 3xyz^2\mathbf{j} - 5xz^3\mathbf{k}$$

(+3)

$$(4) \nabla \times (\nabla\varphi + \mathbf{A}) = \nabla \times \nabla\varphi + \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0} + (2z^4 + 6x^2z^2)\mathbf{i} + 3xyz^2\mathbf{j} - 5xz^3\mathbf{k}$$

$$= (2z^4 + 6x^2z^2)\mathbf{i} + 3xyz^2\mathbf{j} - 5xz^3\mathbf{k}$$

(+2)

2 C: $\mathbf{r} = 2\sqrt{2}t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \log t^2\mathbf{k}$ ($1 \leq t \leq 2$) で表される曲線がある. (10 点)

(1) この曲線の弧長を求めよ.

(2) スカラー場 $\varphi = x^2 + 2y$ について曲線 C に沿っての線積分 $\int_C \varphi ds$ を求めよ.

$$(1) \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2\sqrt{2}\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + \frac{2}{t}\mathbf{k} \quad (+2), \quad \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = 2\sqrt{2 + t^2 + \frac{1}{t^2}} = 2\left(t + \frac{1}{t}\right) \quad (+1)$$

$$\int_1^2 \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| dt = \int_1^2 2\left(t + \frac{1}{t}\right) dt = 2\left[\frac{t^2}{2} + \log t\right]_1^2 = 3 + 2\log 2$$

(+2)

(2) 曲線 C に沿って $\varphi = 8t^2 + 2t^2 = 10t^2$ (+2)

よって

$$\int_C \varphi ds = \int_1^2 \varphi \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| dt = \int_1^2 10t^2 \cdot 2\left(t + \frac{1}{t}\right) dt = 20 \int_1^2 (t^3 + t) dt = 20 \left[\frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2}\right]_1^2 = 105$$

(+1) (+2)