微分積分問題集の補足

p.31

71. (2), (3) 展開 (4) $\dfrac{3x^4-2x+1}{x^2}=\dfrac{3x^4}{x^2}-\dfrac{2x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}=3x^2-\dfrac{2}{x}+x^{-2}$

(5) $\sqrt{x}(x+2)=\sqrt{x}x+2\sqrt{x}=x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}$ (6) $\sqrt[4]{x^3}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}=x^{\frac{3}{4}}+x^{-\frac{3}{4}}$

72. (2) $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ $\therefore$ $\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}=\dfrac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}=\dfrac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{1-\cos x}=1+\cos x$

(3) $\dfrac{1+\cos^3 x}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}+\cos x$ (4) $\dfrac{1}{\sqrt{4-4x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{4}\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

73. (1), (2), (4), (5) 展開 (3) $\dfrac{x^2-3}{x}=x-\dfrac{3}{x}$ (7) 半角の公式より $\cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1+\cos x}{2}$

(8) 2 倍角の公式より $\sin x=2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$

74. 偶関数, 奇関数の積分の性質を用いる. (3) $\cos x$ は偶関数, $\sin x$ は奇関数だから

与式 $=2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\cos x dx$ (4) $\dfrac{x+1}{x^2+1}=\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{1}{x^2+1}$ ここで $\dfrac{x}{x^2+1}$ は奇関数, $\dfrac{1}{x^2+1}$ は偶関数.

75. (2) (1) より $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$

76. $\displaystyle\int_{-1}^{3}f(x)dx=\int_{-1}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{3}f(x)dx.$

$f(x)$ の定義より与式 $=\displaystyle\int_{-1}^{1}(-x^2+4x)dx+\int_{1}^{3}(x^2-2x+4)dx$

77. $f(x)=ax^2+bx+c$ とおくと $f'(x)=2ax+b$. $f(1)=1$, $f'(1)=4$ より 2 つの式をえる.

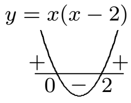
$\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}(ax^2+bx+c)dx=a\int_{-1}^{1}x^2dx+b\int_{-1}^{1}xdx+c\int_{-1}^{1}dx=4$

x^2, 1 は偶関数 x は奇関数だから $2a\displaystyle\int_0^1 x^2dx+2c\int_{-1}^{1}dx=4$

78. 偶関数, 奇関数の積分の性質を用いる $\displaystyle\int_{-1}^{1}(ax^3+bx^2+cx+d)dx=$

$a\displaystyle\int_{-1}^{1}x^3dx+b\int_{-1}^{1}x^2dx+c\int_{-1}^{1}xdx+d\int_{-1}^{1}dx=2b\int_0^1x^2dx+2d\int_{-1}^{1}dx$ 他も同様.

79. (1) $|x|=\begin{cases}x & (x\geqq 0)\\ -x & (x<0)\end{cases}$ より $\displaystyle\int_{-2}^{1}|x|dx=\int_{-2}^{0}|x|dx+\int_0^1|x|dx=\int_{-2}^{0}(-x)dx+\int_0^1xdx$



(2) も同様右グラフより $x\leqq 0$, $2\leqq x$ のとき $x(x-2)\geqq 0$ $\quad\therefore |x(x-2)|=x(x-2)$,

$0<x<2$ のとき $x(x-2)<0$ $\quad\therefore |x(x-2)|=-x(x-2)$.

80. (1) $F(x)=\displaystyle\int_1^x\sqrt{t}\log t dt$ とおくと $F(x^2)=\displaystyle\int_1^{x^2}\sqrt{t}\log t dt$

$\therefore \{F(x^2)\}'=F'(x^2)\cdot(x^2)'=2xF'(x^2)$. 微分積分法の基本定理より $F'(x)=\sqrt{x}\log x$ だから

$\{F(x^2)\}'=2x\sqrt{x^2}\log x^2=\cdots$

(2) $F(x)=\displaystyle\int_0^x t^3e^tdt$ とおくと

$\displaystyle\int_{-x}^{x}t^3e^tdt=\int_{-x}^{0}t^3e^tdt+\int_0^x t^3e^tdt=-\int_0^{-x}t^3e^tdt+\int_0^x t^3e^tdt=-F(-x)+F(x)$

$$\left\{\int_{-x}^{x} t^3 e^t dt\right\}' = -\{F(-x)\}' + F'(x) = -F'(-x)\cdot(-x)' + F'(x) = F'(-x) + F'(x).$$

微分積分の基本定理より $F'(x) = x^3 e^x$ だから $\left\{\int_{-x}^{x} t^3 e^t dt\right\}' = (-x)^3 e^{-x} + x^3 e^x = \cdots$

81. (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt = c \cdots$ ① とおくと $f(x) = \cos x + c \cdots$ ② $\therefore f(t) = \cos t + c.$

これを①に代入. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t + c)dt = c$

左辺 $= [\sin t + ct]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 + c\cdot\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{\pi}{2}c$

(2) $f(x) = 1 + \int_{-1}^{1} x^2 f(t)dt = 1 + x^2\int_{-1}^{1} f(t)dt.$ $\int_{-1}^{1} f(t)dt = c \cdots$ ① とおくと

$f(x) = 1 + cx^2 \cdots$ ② $\therefore f(t) = 1 + ct^2$ これを①に代入. 以下 (1) と同様

82. (1) $0 \leqq x \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき $0 \leqq x^4 \leqq x^2$ $\therefore 0 \geqq -x^4 \geqq -x^2$ $\therefore 1 \geqq 1 - x^4 \geqq 1 - x^2$

よって $1 \geqq \sqrt{1-x^4} \geqq \sqrt{1-x^2}$ $\therefore 1 \leqq \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \leqq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(2) (1) の各辺を 0 から $\frac{1}{\sqrt{2}}$ まで積分すると $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dx \leqq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \leqq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

ここで $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\mathrm{Sin}^{-1} x]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$