微分積分 I 問題集の補足

p. 36

83. (1) $x^2+x+1=t$ とおく．　(2) $x^3-x^2+1=t$ とおく．$\dfrac{f'}{f}$ を使う　(3) $1+\cos x=t$ とおく．

(4) e^x の積分は e^x より e^{-2x} の積分は $-\dfrac{1}{2}e^{-2x}$. $\cos x$ の積分は $\sin x$ より $\cos\dfrac{x}{3}$ の積分は $3\sin\dfrac{x}{3}$.

(5) $\mathrm{Tan}^{-1}x=t$ とおく．　(6) $2x-1=t$ とおく．

84. (1) $1+8x=t$ とおく．　(2) $-\dfrac{x^2}{2}=t$ とおく．　(3) $\dfrac{x-\pi}{3}=t$ とおく．　(4) $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$(半角の公式)

(5) $x-3=t$ とおく．　(6) $2x+1=t$ とおく．

85. 部分積分 (1) e^{2x} を積分　(2) $\sin\pi x$ を積分. 積分すると $-\dfrac{1}{\pi}\cos\pi x$　(3) $x+1$ を積分　(4) x を積分. $\dfrac{x^2}{1+x^2}=1-\dfrac{1}{1+x^2}$　(5) x を積分. $\dfrac{x^3}{1+x^2}=x-\dfrac{x}{1+x^2}$. $\dfrac{f'}{f}$ を使う　(6) 2^x を積分. 積分すると $\dfrac{2^x}{\log 2}$

86. 部分積分 (1) e^{2x} を積分　(2) $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ を積分　(3) x^2 を積分 (部分積分を 2 回)　(4) $(x-1)^4$ を積分 (部分積分を 2 回)　(5) $1\times\mathrm{Cos}^{-1}x$ として 1 を積分, $1-x^2=t$ とおく　(6) x を積分 $\dfrac{x^2}{1+x^2}=1-\dfrac{1}{1+x^2}$

87. (1) $\dfrac{\tan x}{\cos^2 x}=\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$ に注意. (3) $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ を積分すると $\tan x$. よって

$I=\displaystyle\int \tan x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x\cdot\tan x-\int\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\tan x dx=\tan^2 x-I$ ゆえに $2I=\tan^2 x, I=\dfrac{1}{2}\tan^2 x$

88. (1) 解答参照 $(x^3+x)\sqrt{x^2+1}=x(x^2+1)\sqrt{x^2+1}$. $x^2+1=t$ とおくと $2xdx=dt$ $\therefore xdx=\dfrac{1}{2}dt$. 与式 $=\displaystyle\int t\sqrt{t}\frac{1}{2}dt$

(2) 解答参照 $\dfrac{2x}{x^4+2x^2+5}=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2+4}$. $x^2+1=t$ とおくと $2xdx=dt$ $\therefore xdx=\dfrac{1}{2}dt$. 与式 $=\displaystyle\int\frac{1}{t^2+4}\frac{1}{2}dt$

(3) 解答参照 $(x^3+2x+2)\div(x^2+2x+2)=x-2$ 余り $4x+6$. よって $\dfrac{x^3+2x+2}{x^2+2x+2}=x-2+\dfrac{4x+6}{x^2+2x+2}$

$=x-2+\dfrac{4x+6}{(x+1)^2+1}$. $x+1=t$ とおくと $dx=dt$. 与式 $=\displaystyle\int x-2+\frac{4x+6}{(x+1)^2+1}dx=\frac{1}{2}x^2-2x+\int\frac{4t+2}{t^2+1}dt$

$\dfrac{4t+2}{t^2+1}=\dfrac{4t}{t^2+1}+\dfrac{2}{t^2+1}$ として $\dfrac{f'}{f}$ と公式を使う．

(4) 解答参照 $\sqrt{x}=t$ とおくと $x=t^2$ よって $dx=2tdt$ ゆえに 与式 $=\displaystyle\int 2te^t dt$. e^t を積分して部分積分

(5) 解答参照 $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ よって $\sin^3 x\cos^2 x=(1-\cos^2 x)\cos^2 x\sin x$. $\cos x=t$ とおく．

(6) 解答参照 半角の公式より $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$. $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$. よって

$\sin^2 x\cos^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}\cdot\dfrac{1+\cos 2x}{2}=\dfrac{1-\cos^2 2x}{4}=\dfrac{\sin^2 2x}{4}$. 再び半角の公式を使って

$\sin^2 2x=\dfrac{1-\cos 4x}{2}$ だから $\sin^2 x\cos^2 x=\dfrac{1-\cos 4x}{8}$

(7) 解答参照 $\sqrt[3]{x}=t$ とおくと $x=t^3$ よって $dx=3t^2dt$ ゆえに 与式 $=\displaystyle\int\frac{3t^2}{t+1}dt$.

$3t^2\div(t+1)=3t-3$ 余り 3. よって $\dfrac{3t^2}{t+1}=3t-3+\dfrac{3}{t+1}$

(8) 解答参照 $2\log x=t$ とおくと $\log x=\dfrac{t}{2}$. $x=e^{\frac{t}{2}}$ よって $dx=\dfrac{1}{2}e^t dt$ ゆえに 与式 $=\displaystyle\int\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}\sin t dt$. 公式を使う

89. (1) 解答参照 $e^x=t$ とおくと $x=\log t$ よって $dx=\dfrac{1}{t}dt$ ゆえに与式 $=\displaystyle\int_1^e\frac{1}{t(t+1)}dt$. $\dfrac{1}{t(t+1)}=\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t+1}$

(2) 解答参照 $1\times(\log x)^3$ として 1 を積分する部分積分. 部分積分を繰り返す.

(3) 解答参照 $\dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$ は偶関数だから 与式 $=2\displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$. $x=2\sin\theta$ とおくと $dx=2\cos\theta d\theta$.

$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4\sin^2\theta}=\sqrt{4\cos^2\theta}=2\cos\theta$. よって 与式 $=8\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2\theta d\theta$. 半角の公式

(4) 解答参照 $4x-x^2=-(x^2-4x)=-(x-2)^2+4$. $x-2=t$ とおくと 与式 $=\displaystyle\int_{-1}^0 \dfrac{t+2}{\sqrt{4-t^2}}dx$.

$x=2\sin\theta$. $\dfrac{t}{\sqrt{4-t^2}}$ については $4-t^2=u$ とおく. $\dfrac{2}{\sqrt{4-t^2}}$ については公式

(5) 解答参照 x^2 を積分する部分積分. $\dfrac{x^3}{x^2+1}=x-\dfrac{x}{x^2+1}$. $\dfrac{f'}{f}$ を使う

(6) 解答参照 $\sqrt{e^x-1}=t$ とおくと $e^x-1=t^2$. $e^xdx=2tdt$. よって 与式 $=\displaystyle\int_0^2\dfrac{2t^2}{t^2+4}dx$. $\dfrac{2t^2}{t^2+4}=2-\dfrac{8}{t^2+4}$

90. (1) 解答参照　積を和・差に直す公式より $\sin mx\sin nx=-\dfrac{1}{2}\{\cos(m+n)x-\cos(m-n)x\}$.

$m=n$ のとき $\cos(m-n)x=\cos 0=1$ だから $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos(m-n)xdx=\int_0^{2\pi}dx=2\pi$.

その他の積分は $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos(m\pm n)xdx=\left[\dfrac{1}{m\pm n}\sin(m\pm n)x\right]_0^{2\pi}=\dfrac{1}{m\pm n}\{\sin 2(m\pm n)\pi-\sin 0\}=0$.

(2) 解答参照　積を和・差に直す公式より $\sin mx\cos nx=\dfrac{1}{2}\{\sin(m+n)x+\sin(m-n)x\}$.

$m=n$ のときも $\sin(m-n)x=\sin 0=0$. 以下同様

91. 解答参照 e^x を積分する部分積分. $I_{n+1}=\displaystyle\int_0^1 x^{n+1}e^xdx=[x^{n+1}e^x]_0^1-\int_0^1(n+1)x^ne^xdx$

$=e-0-(n+1)\displaystyle\int_0^1 x^ne^xdx=e-(n+1)I_n$.

92. 解答参照 左辺 $=\displaystyle\int_a^{2\pi}f(x)dx+\int_{2\pi}^{a+2\pi}f(x)dx$. $x-2\pi=t$ とおくと $x=t+2\pi$. $dx=dt$.

x	2π	$\to$	$a+2\pi$
t	0	$\to$	a

よって 左辺 $=\displaystyle\int_a^{2\pi}f(x)dx+\int_0^a f(t+2\pi)dt$. $f(x)$ は周期 2π の周期関数だから $f(t+2\pi)=f(t)$.

よって 左辺 $=\displaystyle\int_a^{2\pi}f(x)dx+\int_0^a f(t)dt=\int_0^a f(x)dx+\int_a^{2\pi}f(x)dx=$ 右辺.

93. 解答参照 $x=\dfrac{\pi}{2}-t$ とおくと $dx=-dt$. $t=\dfrac{\pi}{2}-x$.

x	0	$\to$	2π
t	$\frac{\pi}{2}$	$\to$	$-\frac{3\pi}{2}$

左辺 $=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{3\pi}{2}}f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)(-dt)=\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)dt$. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)=\cos t$ だから.

左辺 $=\displaystyle\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(\cos t)dt$. $\cos t$ は周期 2π の周期関数だから $f(\cos t)$ も同じ. よって前題 92 で $a=-\dfrac{3\pi}{2}$ とすると

$a+2\pi=-\dfrac{3\pi}{2}+2\pi=\dfrac{\pi}{2}$ となるから $\displaystyle\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(\cos t)dt=\int_0^{2\pi}f(\cos t)dt=$ 右辺