

95. 解答参照 (1) $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \log |\sin x|$ と $\log \frac{1}{\sqrt{2}} = \log 2^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \log 2$ に注意

(2) 半角の公式より $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$

$$\sin^4 \theta = (\sin^2 \theta)^2 = \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right)^2 = \frac{1 - 2 \cos 2\theta + \cos^2 2\theta}{4} = \frac{1 - 2 \cos 2\theta + \frac{1 + \cos 4\theta}{2}}{4}.$$

96. 解答参照 (2) $u = \frac{x^2}{y}, v = \frac{y^2}{x}$ より $u^2 v = \frac{x^4}{y^2} \cdot \frac{y^2}{x} = x^3 \quad \therefore x = \sqrt[3]{u^2 v} = u^{\frac{2}{3}} v^{\frac{1}{3}}$

どうようにして $y = \sqrt[3]{uv^2} = u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}}$. よって $\frac{\partial x}{\partial u} = x_u = \frac{2}{3} u^{-\frac{1}{3}} v^{\frac{1}{3}}, \frac{\partial x}{\partial v} = x_v = \frac{1}{3} u^{\frac{2}{3}} v^{-\frac{2}{3}}$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = y_u = \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} v^{\frac{2}{3}}, \frac{\partial y}{\partial v} = y_v = \frac{2}{3} u^{\frac{1}{3}} v^{-\frac{1}{3}}. \quad \text{ゆえに } J = \dots$$

97. 解答参照 r の範囲 $\epsilon \leq r \leq \frac{1}{\sin \theta}$ について r が最大となるのは解答の図の矢印がさす直角三角形の斜辺のときで, このとき $\sin \theta = \frac{1}{\text{斜辺}}$. よって斜辺 $= \frac{1}{\sin \theta}$.

$$\cos \theta = t \text{ とおくと } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta}{1 - \cos^2 \theta} d\theta = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^0 \frac{-dt}{1 - t^2} = \text{とおくと } \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt = \dots$$

98. 解答参照. 領域については教科書 p. 80 例題 4 も参照 ($a = 2$ の場合)

99. 解答参照

100. 例題, 解答参照. 例題同様 $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いてよい.

(1) $(x-1)^2 e^{-x^2} = (x^2 - 2x + 1)e^{-x^2} = x^2 e^{-x^2} - 2x e^{-x^2} + e^{-x^2}$ ここで $x^2 e^{-x^2}$ と e^{-x^2} は偶関数, $x e^{-x^2}$ は奇関数. よって例題より ...

(3) $\sqrt{x} = t$ とおくと $x = t^2$. よって $dx = 2t dt$

(4) $\sqrt{\log \frac{1}{x}} = t$ とおくと $\log \frac{1}{x} = t^2$. $\log \frac{1}{x} = -\log x$ だから $\log x = -t^2, x = e^{-t^2}$.

よって $dx = e^{-t^2} (-2t) dt$.

101. 解答参照.

102. 解答参照 $y + x^2 = u, y - x^2 = v$ とおくと $u + v = 2y, u - v = 2x^2$ よって $y = \frac{u+v}{2}, x^2 = \frac{u-v}{2}$.

$$x > 0 \text{ より } x = \sqrt{\frac{u-v}{2}}.$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = x_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} (u-v)^{-\frac{1}{2}} (u-v)_u = \frac{1}{2\sqrt{2(u-v)}},$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = x_v = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} (u-v)^{-\frac{1}{2}} (u-v)_v = -\frac{1}{2\sqrt{2(u-v)}}. \quad \text{よって } J = \dots$$

領域については $y = \frac{u+v}{2}, x^2 = \frac{u-v}{2}$ を $y \leq x^2, y \leq -x^2 + 2, y \geq -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}$ に代入.