微分積分 I 問題集の補足

p. 44

113. 変数分離形 (3) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 y}dy = -\cot y$ (公式 教科書 p. 169 $\displaystyle\frac{1}{\sin^2 y} = \mathrm{cosec}^2 y$ に注意),

$\displaystyle\int \frac{\sin t}{\cos^2 t}dt$ については $\cos t = u$ とおく置換積分.

(4) $\displaystyle\int \frac{2y}{1-y^2}dy = -\int \frac{-2y}{1-y^2}dy$ として $\displaystyle\int \frac{f'}{f}dy = \log|f|$ を用いる.

(6) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}dx$ については $\log x = t$ とおく置換積分.

114. 変数分離形 (1) $e^{x-2y} = \dfrac{e^x}{e^{2y}}$.

115. 同次形 (2) $\displaystyle\int \frac{1}{u\log u}du$ については $\log u = t$ とおく置換積分. $\log\dfrac{y}{x} = Cx$ より $\dfrac{y}{x} = e^{Cx}$. ゆえに $y = xe^{Cx}$

116. (1) 両辺を x^2 で割ると同次形 $\dfrac{u+1}{2u^2+u} = \dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{2u+1}$(部分分数分解).

よって $\displaystyle\int \frac{u+1}{2u^2+u}du = \int\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{2u+1}\right)du = \log|u| - \frac{1}{2}\log|2u+1|$ $\left(\dfrac{(2u+1)'}{2u+1} = \dfrac{2}{2u+1}\right.$ に注意).

(2) 両辺を x で割ると同次形 $e^{\frac{y}{x}} = \log|x| + C$ より $\dfrac{y}{x} = \log(\log|x| + C)$. よって $y = x\log(\log|x| + C)$.

117. 1 階線形微分方程式 (1) 両辺を x^2 で割ると 1 階線形 $y' - \dfrac{2}{x}y = 0$ の一般解は $y = Cx^2$

(2) $\displaystyle\int \tan x dx = -\log|\cos x|$ (公式 教科書 p. 169). $y' + 2y\tan x = 0$ の一般解は $y = C\cos^2 x$.

$\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$ については $\cos x = t$ とおく置換積分. 113. (3) と同様

(3) 両辺を $x\log x$ で割ると 1 階線形 $\displaystyle\int \frac{1}{x\log x}dx$ については $\log x = t$ とおく置換積分. 115. (2) と同様.

$y' + \dfrac{1}{x\log x}y = 0$ の一般解は $y = \dfrac{C}{\log x}$. $\displaystyle\int \frac{2\log x}{x}dx$ については $\log x = t$ とおく置換積分.

(4) $y' - 2xy = 0$ の一般解は $y = Ce^{x^2}$. $\displaystyle\int 2xe^{-x^2}dx$ については $-x^2 = t$ とおく置換積分.

(5) $x' + 3x = 0$ の一般解は $x = Ce^{-3t}$.

(6) 両辺を t^2+1 で割ると 1 階線形 $x' - \dfrac{2t}{t^2+1}x = 0$ の一般解は $x = C(t^2+1)$.

$\displaystyle\int \frac{t}{(t^2+1)^2}dt$ については $t^2 + 1 = u$ とおく置換積分.

118. 1 階線形微分方程式 (1)(変数分離形でもできる)$y' - 2y = 0$ の一般解は $y = Ce^{2x}$.

(2) 両辺を $x+1$ で割ると 1 階線形 $y' + \dfrac{1}{x+1}y = 0$ の一般解は $y = \dfrac{C}{x+1}$.

(3) 両辺を $\cos t$ で割ると 1 階線形 $x' + x\tan t = 0$ の一般解は $x = C\cos t$.

(4) $\displaystyle\int e^t \cos t dt = \frac{e^t}{2}(\cos x + \sin x)$ (公式 微分積分 I p. 94[例題 10]).

119. 解答参照 $H(x,0)$, 点 P における接線の方程式は $Y - y = y'(X-x)$ より x 軸 $(Y=0)$ との交点 T については

$-y = y'(X-x)$. よって $X = x - \dfrac{y}{y'}$. ゆえに $T(x - \dfrac{y}{y'}, 0)$. よって $HT = \left|x - \left(x - \dfrac{y}{y'}\right)\right| = \left|\dfrac{y}{y'}\right| = k$.

ゆえに $y' = \pm\dfrac{1}{k}y$(変数分離形). これを解いて $y = Ce^{\pm\frac{1}{k}x}$. $(x,y) = (0,1)$ を代入して $C = 1$.