微分積分 II 問題集の補足

p. 49

127. (1) $W(e^{-x}\cos 3x, e^{-x}\sin 3x) = \begin{vmatrix} e^{-x}\cos 3x & e^{-x}\sin 3x \\ -e^{-x}\cos 3x - 3e^{-x}\sin 3x & -e^{-x}\sin 3x + 3e^{-x}\cos 3x \end{vmatrix}$

$= e^{-x}\cos 3x \cdot (-e^{-x}\sin 3x + 3e^{-x}\cos 3x) - e^{-x}\sin 3x \cdot (-e^{-x}\cos 3x - 3e^{-x}\sin 3x)$

$= -e^{-2x}\sin 3x\cos 3x + 3e^{-2x}\cos^2 3x + e^{-2x}\sin 3x\cos 3x + 3e^{-2x}\sin^2 3x$

$= 3e^{-2x}(\cos^2 3x + \sin^2 3x) = 3e^{-2x} \neq 0$. よって線形独立

(2) $W(\log x, x\log x) = \begin{vmatrix} \log x & x\log x \\ \dfrac{1}{x} & \log x + 1 \end{vmatrix} = \log x(\log x + 1) - x(\log x)\cdot\dfrac{1}{x} = (\log x)^2 + \log x - \log x$

$= (\log x)^2 \neq 0$. よって線形独立

128. (1) 特性方程式 $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, $(\lambda+1)(\lambda+2) = 0$. $\therefore \lambda = -1, -2$.

よって一般解は $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$. $y' = -C_1e^{-x} - 2C_2e^{-2x}$ より条件 $x = 0$ のとき $y = 0, y' = 1$ より

$0 = C_1 + C_2, 1 = -C_1 - 2C_2$. よって $C_1 = 1, C_2 = -1$. よって求める解は $y = e^{-x} - e^{-2x}$.

(2) 特性方程式 $\lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0$, $\lambda = 2 \pm \sqrt{2}$.

よって一般解は $y = C_1e^{(2+\sqrt{2})x} + C_2e^{(2-\sqrt{2})x}$. $y' = (2+\sqrt{2})C_1e^{(2+\sqrt{2})x} + (2-\sqrt{2})C_2e^{(2-\sqrt{2})x}$

条件より $C_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, C_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. よって求める解は $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e^{(2+\sqrt{2})x} - e^{(2-\sqrt{2})x})$.

(3) 特性方程式 $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, $\lambda = 1 \pm i$. よって一般解は $y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x)$.

条件より $C_1 = 1, C_2 = \dfrac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}} = e^{-\frac{\pi}{2}}$. よって求める解は $y = e^x(\cos x + e^{-\frac{\pi}{2}}\sin x)$.

(4) 特性方程式 $\lambda^2 + 9 = 0$, $\lambda = \pm 3i$. よって一般解は $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$. $y' = -3C_1\sin 3x + 3C_2\cos 3x$

条件より $C_1 = 1, C_2 = \dfrac{1}{3}$. よって求める解は $y = \cos 3x + \dfrac{1}{3}\sin 3x$.

(5) 特性方程式 $4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$, $\lambda = \dfrac{1}{2}$. (2 重解) よって一般解は $y = (C_1 + C_2x)e^{\frac{x}{2}}$. $y' = C_2e^{\frac{x}{2}} + (C_1 + C_2x)\dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$

条件より $C_1 = 1, C_2 = -\dfrac{1}{2}$. よって求める解は $y = \left(1 - \dfrac{x}{2}\right)e^{\frac{x}{2}}$.

(6) 特性方程式 $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, $\lambda = -1$. (2 重解) よって一般解は $y = (C_1 + C_2x)e^{-x}$.

条件より $C_1 = 2e, C_2 = -e$. よって求める解は $y = (2e - ex)e^{-x} = (2-x)e^{1-x}$.

129. (1) 特性方程式 $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, $\lambda = 2$. (2 重解) よって $y'' - 4y' + 4y = 0$ の一般解は $y = (C_1 + C_2x)e^{2x}$.

$y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$ の 1 つの解を $y = Ae^{-x}$ と予想. $y' = -Ae^{-x}, y'' = Ae^{-x}$ を方程式に代入.

$9Ae^{-x} = e^{-x}$ より $A = \dfrac{1}{9}$. よって 1 つの解は $y = \dfrac{1}{9}e^{-x}$. よって求める一般解は $y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + \dfrac{1}{9}e^{-x}$

(2) 特性方程式 $\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$, $\lambda = 2 \pm \sqrt{3}$. よって $y'' - 4y' + y = 0$ の一般解は $y = C_1e^{(2+\sqrt{3})x} + C_2e^{(2-\sqrt{3})x}$.

$y'' - 4y' + y = 2x + 1$ の 1 つの解を $y = ax + b$ と予想. $y' = a, y'' = 0$ を方程式に代入.

$ax + b - 4a = 2x + 1$ より $a = 2, b = 9$. よって 1 つの解は $y = 2x + 9$.

よって求める一般解は $y = C_1e^{(2+\sqrt{3})x} + C_2e^{(2-\sqrt{3})x} + 2x + 9$

(3) 特性方程式 $\lambda^2+1=0$, $\lambda=\pm i$. よって $y''+y=0$ の一般解は $y=C_1\cos x+C_2\sin x$.

$y''+y=\cos 3x$ の 1 つの解を $y=A\cos 3x+B\sin 3x$ と予想.

$y'=-3A\sin 3x+3B\cos 3x, y''=-9A\cos 3x-9B\sin 3x$ を方程式に代入.

$-8A\cos 3x-8B\sin 3x=\cos 3x$ より $A=-\dfrac{1}{8}, B=0$. よって 1 つの解は $y=-\dfrac{1}{8}\cos 3x$.

よって求める一般解は $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\dfrac{1}{8}\cos 3x$

(4) 特性方程式 $\lambda^2+2=0$, $\lambda=\pm\sqrt{2}i$. よって $y''+2y=0$ の一般解は $y=C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x$.

$y''+2y=\sin 2x$ の 1 つの解を $y=A\cos 2x+B\sin 2x$ と予想.

$y'=-2A\sin 2x+2B\cos 2x, y''=-4A\cos 2x-4B\sin 2x$ を方程式に代入.

$-2A\cos 2x-2B\sin 2x=\sin 2x$ より $A=0, B=-\dfrac{1}{2}$. よって 1 つの解は $y=-\dfrac{1}{2}\sin 2x$.

よって求める一般解は $y=C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x-\dfrac{1}{2}\sin 2x$

130. (1) 1 つの解を $y=ax^2+bx+c$ と予想. $y'=2ax+b, y''=2a$ を方程式に代入.

$4ax+2a+2b=2x-3$ より $a=\dfrac{1}{2}, b=-2$. よって 1 つの解は $y=\dfrac{1}{2}x^2-2x$.

特性方程式 $\lambda^2+2\lambda=0$, $\lambda=0,-2$. よって $y''+2y'=0$ の一般解は $y=C_1+C_2e^{-2x}$.

よって求める一般解は $y=\dfrac{1}{2}x^2-2x+C_1+C_2e^{-2x}$

(2) 1 つの解を $y=(ax+b)e^{2x}$ と予想. $y'=ae^{2x}+(ax+b)2e^{2x}=(2ax+a+2b)e^{2x}$,

$y''=2ae^{2x}+(2ax+a+2b)2e^{2x}=(4ax+4a+4b)e^{2x}$ を方程式に代入.

$(ax+2a+b)e^{2x}=xe^{2x}$ より $a=1, b=-2$. よって 1 つの解は $y=(x-2)e^{2x}$.

特性方程式 $\lambda^2-2\lambda+1=0$, $\lambda=1$(2 重解). よって $y''-2y'+y=0$ の一般解は $y=(C_1+C_2x)e^x$.

よって求める一般解は $y=(x-2)e^{2x}x+(C_1+C_2x)e^x$

(3) 1 つの解を $y=axe^x$ と予想. $y'=ae^x+axe^x=(ax+a)e^x, y''=ae^x+(ax+a)e^x=(ax+2a)e^x$

を方程式に代入. $2ae^x=e^x$ より $a=\dfrac{1}{2}$. よって 1 つの解は $y=\dfrac{1}{2}xe^x$.

特性方程式 $\lambda^2-1=0$, $\lambda=\pm 1$. よって $y''-y=0$ の一般解は $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$.

よって求める一般解は $y=\dfrac{1}{2}xe^x+C_1e^x+C_2e^{-x}$

(4) 1 つの解を $y=(ax^2+bx)e^x$ と予想. $y'=(2ax+b)e^x+(ax^2+bx)e^x=\{ax^2+(2a+b)x+b\}e^x$,

$y''=(2ax+2a+b)e^x+\{ax^2+(2a+b)x+b\}e^x=\{ax^2+(4a+b)x+2a+2b\}e^x$ を方程式に代入.

$(4ax+2a+2b)e^x=xe^x$ より $a=\dfrac{1}{4}, b=-\dfrac{1}{4}$. よって 1 つの解は $y=\dfrac{1}{4}(x^2-x)e^x$.

特性方程式 $\lambda^2-1=0$, $\lambda=\pm 1$. よって $y''-y=0$ の一般解は $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$.

よって求める一般解は $y=\dfrac{1}{4}(x^2-x)e^x+C_1e^x+C_2e^{-x}$