# 数学 A　連続, 中間値の定理

p. 38 関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続である $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to a} f(x)$ が存在して $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

p. 39 例 3 関数 $|x| = \begin{cases} x & (x \geqq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$ だから

右側 ($x \leqq 0$ のとき) からも左側 ($x < 0$ のとき) からも $x \to 0$ のとき $|x| \to 0$.

$\Rightarrow$ $\lim_{x\to 0} |x| = 0$ であり,

$|0| = 0$ だから

$\lim_{x\to 0} |x| = |0|$.

よって関数 $|x|$ は $x=0$ で連続である. ($x=0$ 以外で連続なことは明らかだから, すべての実数で連続である)

例 4 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} (= x+2) & (x \neq 2) \\ 1 & (x = 2) \end{cases}$ 　$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$ で $f(2) = 1$

よって $\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$ $\Rightarrow$ $f(x)$ は $x=2$ で連続でない.

p. 39　$\boxed{f(x) \text{ は } x=a \text{ で微分可能 } \Rightarrow f(x) \text{ は } x=a \text{ で連続}}$

ただし $f(x)$ が $x=a$ で連続 $\Rightarrow$ 微分可能とは限らない.

$f(x)$ が $x=a$ で微分可能 $\Leftrightarrow$ $f'(x) (= \lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a})$ が存在

$x \to a$ のとき $x - a \to 0$ だから極限値が存在するためには $f(x) \to f(a)$ でなければならない.

例 6 関数 $f(x) = |x|$ は例 3 より $x=0$ で連続だったが

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

$\dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} \dfrac{x}{x} = 1 & (x \geqq 0)) \\ \dfrac{-x}{x} = -1 & (x < 0) \end{cases}$ だから極限値は存在せず $f'(0)$ は計算できない.

よって $f(x)$ は $x=0$ で微分可能でない.

p. 40 中間値の定理　(p. 40 のグラフを参照)$f(x)$ が $x=a$(A の点) から $x=b$(B の点) まで連続だから $y=f(x)$ のグラフは直線 $y=k$ のグラフと必ずどこかで交わる. この交点が $x=c$ の点

例題 7 $f(x) = \cos x - x$ とおくと $\cos x$ も $x$ も関数として実数全域で連続だから当然 $f(x)$ は $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ で連続.

$f(0) = \cos 0 - 0 = 1 > 0, f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{2} < 0$

中間の値として $k=0$ とすれば中間値の定理より $f(c) = 0$ となる $c$ $(0 < c < \dfrac{\pi}{2})$ が存在.

$x = c$ が求める実数解 (の 1 つ)