重積分 変数変換 (極座標)

1 変数関数の置換積分の公式 (新微分積分 I,p.104)

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt \qquad (x=\varphi(t), a=\varphi(\alpha), b=\varphi(\beta))$$

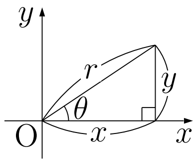
ポイント　$\boxed{x=\varphi(t)\ \to\ dx=\varphi'(t)dt}$

2 重積分の変数変換 (≒1 変数の置換積分)(p.80)

$$\iint_D f(x,y)\ dxdy = \iint_D f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv \qquad (x=\varphi(u,v), y=\psi(u,v)))$$

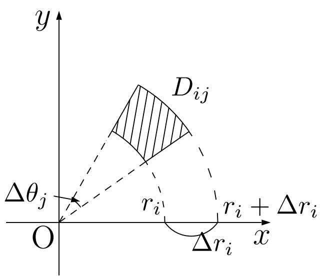
極座標の場合

$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$



		高さ	底面積
	$\iint$	$f(x,y)$	$dxdy$
p.60	$\sum\sum$	$f(\xi_{ij},\eta_{ij})$	$\Delta x_i\Delta y_j$
	$\sum\sum$	$f(*,*)$	?
	$\iint$	$f(r\cos\theta, r\sin\theta)$	$?drd\theta$

極座標の場合の底面積 (分割した D_{ij} の面積)



大きい扇形の面積　円の面積 × 割合 $=\pi(r_i+\Delta r_i)^2\times\dfrac{\Delta\theta_j}{2\pi}=\dfrac{1}{2}(r_i+\Delta r_i)^2\Delta\theta_j$

小さい扇形の面積　円の面積 × 割合 $=\pi r_i^2\times\dfrac{\Delta\theta_j}{2\pi}=\dfrac{1}{2}r_i^2\Delta\theta_j$

D_{ij} の面積　$\dfrac{1}{2}(r_i+\Delta r_i)^2\Delta\theta_j-\dfrac{1}{2}r_i^2\Delta\theta_j=\dfrac{1}{2}\{(r_i+\Delta r_i)^2-r_i^2\}\Delta\theta_j$

$=\dfrac{1}{2}(r_i^2+2r_i\Delta r_i+\Delta r_i^2-r_i^2)\Delta\theta_j=\dfrac{1}{2}(2r_i\Delta r_i+\Delta r_i^2)\Delta\theta_j$

$=\dfrac{1}{2}(2r_i+\Delta r_i)\Delta r_i\Delta\theta_j=(r_i+\dfrac{1}{2}\Delta r_i)\Delta r_i\Delta\theta_j \fallingdotseq r_i\Delta r_i\Delta\theta_j$

$\Delta x_i\Delta y_j=r_i\Delta r_i\Delta\theta_j\ \to\ \boxed{dxdy=rdrd\theta}$