基礎数学問題集の補足

p. 88

260. (4) $a_2 = ar = \sqrt{2}$, $a_4 = ar^3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. よって $r^2 = \dfrac{1}{2}$ $\therefore r = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $a = \pm 2$.

よって $a_n = 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$ または $-2\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$

261. (2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^2$ は $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ の n を $n-1$ に置き換えて

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{1}{6}(n-1)\{(n-1)+1\}\{2(n-1)+1\} = \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$ となる.

(3) 巻末解答参照 (4) $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \dfrac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})} = \dfrac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k+1-k} = \sqrt{k+1}-\sqrt{k}$

262. (1) 右辺 $\displaystyle = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k) = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$

$= a_1 + (a_2 + a_3 + \cdots + a_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) = a_n =$ 左辺

(2) $b_n = 4 + 3(n-1) = 3n+1$. よって $b_k = 3k+1$ $\displaystyle\therefore a_n = a_1\sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(3k+1) = \cdots$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}k(3k-1) = \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k = \cdots$

264. (2) 巻末解答参照 $S_4 = S_8\cdot\dfrac{1}{17}$ $\therefore \dfrac{a(1-r^4)}{1-r} = \dfrac{a(1-r^8)}{1-r}\cdot\dfrac{1}{17}$.

$1-r^8 = (1-r^4)(1+r^4)$ だから $\dfrac{17a(1-r^4)}{1-r} = \dfrac{a(1-r^4)(1+r^4)}{1-r}$.

$1-r^4 = (1-r^2)(1+r^2) = (1-r)(1+r)(1+r^2)$ だから $\dfrac{1-r^4}{1-r} = (1+r)(1+r^2)$. よって

$17a(1+r)(1+r^2) = a(1+r)(1+r^2)(1+r^4)$ $\therefore 17a(1+r)(1+r^2) - a(1+r)(1+r^2)(1+r^4) = 0$.

よって $a(1+r)(1+r^2)\{17-(1+r^4)\} = 0$ $\therefore r = -1$ または $r^2 = -1$ または $17 = 1 + r^4$

$r^2 \geqq 0$ だから $r^2 \neq -1$. また $17 = 1 + r^4$ より $r^4 = 16$. $\therefore r^2 = 4$ $\therefore r = \pm 2$. 従って $r = -1, \pm 2$.

265. 巻末解答参照

266. (1) 巻末解答参照 (2) 与式 $\displaystyle = \sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} = \sum_{k=1}^{n} 2(k-1)(2k-1) = \cdots$

267. (1) 与式 $\displaystyle = \sum_{k=1}^{n} k\{n-(k-1)\} = \sum_{k=1}^{n}\{(n+1)k - k^2\}$. $\sum$ の中では変化するのは k で n は定数だから

与式 $\displaystyle = (n+1)\sum_{k=1}^{n}k - \sum_{k=1}^{n}k^2 = \cdots$. 解りにくいときは n に数を代入して考えてみよ.

(2) $a_1 = 1, a_2 = 11 = 1 + 10, a_3 = 111 = 1 + 10 + 100, \cdots, a_k = 1 + 10 + \cdots 10^{k-1}$

これは初項 1 公比 10 の等比数列の和だから $a_k = \dfrac{1(10^k-1)}{10-1} = \dfrac{10^k-1}{9}$

よって与式 $\displaystyle = \sum_{k=1}^{n}\frac{10^k-1}{9} = \frac{1}{9}\left\{\sum_{k=1}^{n}10^k - \sum_{k=1}^{n}1\right\}$.

このとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}10^k$ は初項 10 公比 10 の等比数列の和だから $\dfrac{10(10^n-1)}{10-1}$.

(3) 巻末解答参照 $a_k = \dfrac{1}{k!} - \dfrac{1}{(k+1)!}$ よって 与式 $\displaystyle = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)!} = \cdots$

268. $S_n = 1 + 3\cdot 2 + 5\cdot 2^2 + \cdots + (2n-1)2^{n-1}$ これを 2 倍すると

$2S_n = 2 + 3\cdot 2^2 + 5\cdot 2^3 + \cdots + (2n-3)2^{n-1} + (2n-1)2^n$. 上の式から引く.

$3\cdot 2 - 2 = (3-1)2 = 2\cdot 2,\ \ 5\cdot 2^2 - 3\cdot 2^2 = (5-3)2^2 = 2\cdot 2^2, \cdots$

$\cdots (2n-1)2^{n-1} - (2n-3)2^{n-1} = \{(2n-1)-(2n-3)\}2^{n-1} = 2\cdot 2^{n-1}$ に注意すると

$S_n - 2S_n = 1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 2^2 + \cdots 2\cdot 2^{n-1} - (2n-1)2^n$.

左辺 $= -S_n$. 右辺の両端の 2 項を除いた和は初項 4 公比 2 の等比数列の初項から <u>第 $n-1$ 項</u> までの和になるから

$-S_n = 1 + \dfrac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} - (2n-1)2^n$ よって $S_n = -1 - 2(2^{n-1}-1) + (2n-1)2^n = \cdots$

269. 巻末解答参照 (1) $n \geqq 5$ より (i) は $n=1$ のときではなくて $n=5$ のときになる

(ii)$n=k$ のとき成り立つ式から $n=k+1$ のときの式への変形について

まず両辺に 2 をかけて左辺をあわせる. ここで右辺 $2k^2$ を $(k+1)^2$ にしたい.

今 $2^{k+1} > 2k^2$ だから $2k^2 > (k+1)^2$ が言えれば $2^{k+1} > (k+1)^2$ が言える.

$2k^2 - (k+1)^2 = k^2 - 2k - 1 = k(k-2) - 1$. 最後の式の値は $k \geqq 5$ より $k(k-2) - 1 \geqq 5(5-2) - 1 = 14 > 0$.

よって $2k^2 - (k+1)^2 > 0$. $\therefore 2k^2 > (k+1)^2$.

よって $2^{k+1} > (k+1)^2$.

(2) $n \geqq 2$ より (i) は $n=1$ のときではなくて $n=2$ のときになる

(ii)$n=k$ のとき成り立つ式から $n=k+1$ のときの式への変形について

まず両辺に $\dfrac{1}{(k+1)^2}$ を加えて左辺をあわせる. ここで右辺 $\dfrac{k-1}{k} + \dfrac{1}{(k+1)^2}$ を $\dfrac{k}{k+1}$ にしたい.

$\dfrac{k-1}{k} + \dfrac{1}{(k+1)^2}$ を通分して $\dfrac{k-1}{k} + \dfrac{1}{(k+1)^2} = \dfrac{(k-1)(k+1)^2 + k}{k(k+1)^2} = \dfrac{k^3 + k^2 - k - 1 + k}{k(k+1)^2} = \dfrac{k^3 + k^2 - 1}{k(k+1)^2}$.

ここで $\dfrac{k}{k+1}$ の分母を合わせると $\dfrac{k}{k+1} = \dfrac{k^2(k+1)}{k(k+1)^2} = \dfrac{k^3+k^2}{k(k+1)^2}$. 以上により

$\dfrac{k-1}{k} + \dfrac{1}{(k+1)^2} = \dfrac{(k-1)(k+1)^2 + k}{k(k+1)^2} = \dfrac{k^3 + k^2 - 1}{k(k+1)^2} < \dfrac{k^3+k^2}{k(k+1)^2} = \dfrac{k^2(k+1)}{k(k+1)^2} = \dfrac{k}{k+1}$.

よって $\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} + \cdots + \dfrac{1}{k^2} + \dfrac{1}{(k+1)^2} < \dfrac{k}{k+1}$