第 2 章 § 2 いろいろな応用

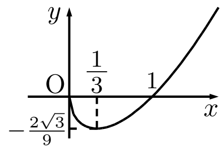
p.76 練習問題 2-A

1. (1) $y' = \sqrt{x} + (x-1)\cdot\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{3x-1}{2\sqrt{x}},\ y'' = \dfrac{3}{2\sqrt{x}} + (3x-1)\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)x^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{3x+1}{4x\sqrt{x}}$

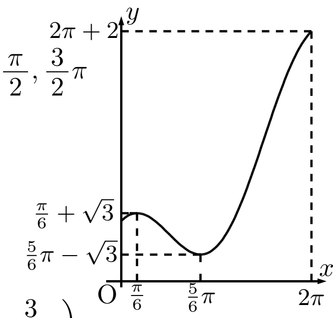
$y' = 0 \to x = \dfrac{1}{3},\ y'' = 0 \to x = -\dfrac{1}{3}.$ $\sqrt{x}$ より定義域は $x \geqq 0$ だから

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y''		$+$	$+$	$+$
y	0	↘	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↗

極大値なし, 極小値 $-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ $\left(x = \dfrac{1}{3}\right)$, 変曲点なし



(2) $y' = 1 - 2\sin x,\ y'' = -2\cos x,\ y' = 0 \to \sin x = \dfrac{1}{2}, x = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5}{6}\pi,\ y'' = 0 \to x = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3}{2}\pi$



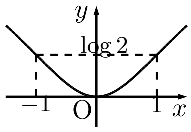
x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
y'	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
y	2	↗	$\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$	↘	$\frac{\pi}{2}$	↘	$\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$	↗	$\frac{3}{2}\pi$	↗	$2\pi+2$

極大値 $\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}$ $\left(x = \dfrac{\pi}{6}\right)$, 極小値 $\dfrac{5}{6}\pi - \sqrt{3}$ $\left(x = \dfrac{5}{6}\pi\right)$, 変曲点 $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right), \left(\dfrac{3}{2}\pi, \dfrac{3}{2}\pi\right)$

(3) $y' = \dfrac{2x}{x^2+1},\ y'' = \dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2},\ y' = 0 \to x = 0,\ y'' = 0 \to x = \pm 1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y	↘	$\log 2$	↘	0	↗	$\log 2$	↗

極大値 なし, 極小値 0 $(x = 0)$, 変曲点 $(\pm 1, \log 2)$

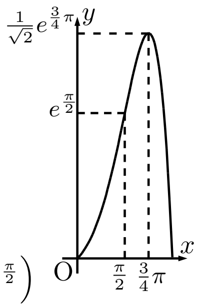


(4) $y' = e^x\sin x + e^x\cos x = e^x(\sin x + \cos x),\ y'' = e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) = 2e^x\cos x,$

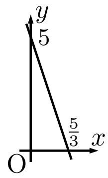
$y' = 0 \to \tan x = -1, x = \dfrac{3}{4}\pi$ $y'' = 0 \to x = \dfrac{\pi}{2}$

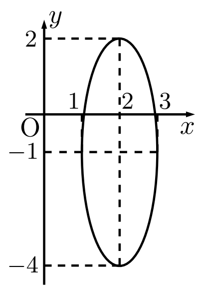
x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
y'	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
y''	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
y	0	↗	$e^{\frac{\pi}{2}}$	↗	$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{3}{4}\pi}$	↘	0

極大値 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{3}{4}\pi}$ $\left(x = \dfrac{3}{4}\pi\right)$, 極小値 なし, 変曲点 $\left(\dfrac{\pi}{2}, e^{\frac{\pi}{2}}\right)$



2. (1) 1 式より $t = x - 1$ よって $y = 2 - 3(x-1) = -3x + 5$





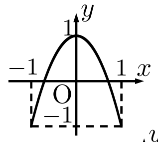
(2) $\cos t = x - 2,\ \sin t = \dfrac{y+1}{-3}$ よって $(x-2)^2 + \left(\dfrac{y+1}{-3}\right)^2 =$

$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ よって $(x-2)^2 + \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1$

楕円 $x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1$ を x 軸方向に 2, y 軸方向に -1 平行移動

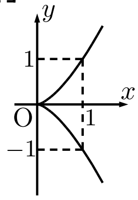
(3) 2 倍角の公式より $y = 1 - 2\sin^2 t = 1 - 2x^2$

$-1 \leqq \sin t \leqq 1$ より $-1 \leqq x \leqq 1$



(4)

t	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5
x	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25
y	-3.375	-1	-0.125	0	0.125	1	3.375



3. (1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{6t-1}{3}$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{2\cos t(-\sin t)}{\cos t}=-2\sin t$

(3) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{2te^{t^2}}{-2e^{-2t}}=-te^{t^2+2t}$

(4) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\frac{1}{(1-t)^2}}{\frac{1}{t}}=\dfrac{t}{(1-t)^2}$

4. (1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{e^t}{2t}$, $t=1$ のとき $x=2,\ y=e,\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e}{2}$. よって求める接線の方程式は $y-e=\dfrac{e}{2}(x-2)$

$y=\dfrac{e}{2}x$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{-\sin t}{\cos t}$, $t=\dfrac{\pi}{3}$ のとき $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1,\ y=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{dy}{dx}=-\sqrt{3}$. よって求める接線の方程式は

$y-\dfrac{1}{2}=-\sqrt{3}\left(x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1\right),\quad y=-\sqrt{3}x+2+\sqrt{3}$

5. 速度 v 加速度 α は $v=\dfrac{dx}{dt}(=x')=a\omega e^{\omega t}+b(-\omega)e^{-\omega t},\ \ \alpha=\dfrac{d^2x}{dt^2}(=x'')=a\omega^2e^{\omega t}+b\omega^2e^{-\omega t}=\omega^2x$

よって加速度 α は x に比例する.

p.77 練習問題 2-B

1. (1) $y'=(\tan^{-1}x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$ より $(1+x^2)y'=1$.

(2) (1) の両辺を x について n 回微分するとライプニッツの公式より

左辺 $=(1+x^2)y^{(n+1)}+{}_n\mathrm{C}_1 2xy^{(n)}+{}_n\mathrm{C}_2 2y^{(n-1)}+0+\cdots+0=(1+x^2)y^{(n+1)}+n\cdot 2xy^{(n)}+\dfrac{n(n-1)}{2}\cdot 2y^{(n-1)}$

$=(1+x^2)y^{(n+1)}+2nxy^{(n)}+n(n-1)y^{(n-1)}$. 右辺 $=0$ より等式が成り立つ

2. (1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{b\cos t}{-a\sin t}=-\dfrac{b\cos t}{a\sin t},\ -\dfrac{b^2x}{a^2y}=-\dfrac{b^2a\cos t}{a^2b\sin t}=-\dfrac{b\cos t}{a\sin t}$. よって $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{b^2x}{a^2y}$

(2) (1) より (x_0,y_0) のとき $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$ よって求める接線の方程式は $y-y_0=-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0)$

$b^2x_0x+a^2y_0y=b^2x_0^2+a^2y_0^2,\ \dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}$. (x_0,y_0) は楕円上の点だから $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$

よって $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$

3. t 分後の水面の深さを $x$cm, 水の容積を $V\mathrm{cm}^3$ とすると円錐容器の深さと上面の半径の比から水面の円の半径は $\dfrac{x}{2}$cm

よって $V=\dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{x}{2}\right)^2x=\dfrac{\pi}{12}x^3$. 毎分 $15\mathrm{cm}^3$ の水を入れるから $V=15t$. よって $\dfrac{\pi}{12}x^3=15t$.

両辺を t について微分すると左辺 $=\dfrac{d(\frac{\pi}{12}x^3)}{dt}=\dfrac{d(\frac{\pi}{12}x^3)}{dx}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\pi}{4}x^2\dfrac{dx}{dt}$. 右辺 $=(15t)'=15$ だから

$\dfrac{\pi}{4}x^2\dfrac{dx}{dt}=15,\ \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{60}{\pi x^2}$. $x=8$ のとき水面の上がる速さは $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{60}{\pi 8^2}=\dfrac{15}{16\pi}$(cm/分)

4. (1) $\mathrm{P}(x,0),\ \mathrm{Q}(0,y),\ y=50-4t$ だから $x^2+y^2=100^2$ より $x^2=100^2-y^2=10000-(50-4t)^2=$

$7500+400t-16t^2$. $x=\sqrt{7500+400t-16t^2}=2\sqrt{1875+100t-4t^2}$.

(2) 速度 v は $v=\dfrac{dx}{dt}(=x')=2\cdot\dfrac{1}{2}(1875+100t-4t^2)^{-\frac{1}{2}}(1875+100t-4t^2)'=\dfrac{100-8t}{\sqrt{1875+100t-4t^2}}$