第 3 章§ 1 不定積分と定積分

p.95 練習問題 1-A

1. (1) 与式 $=\displaystyle\int\left(x-2+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)dx=\frac{1}{2}x^2-2x+\log|x|+\frac{3}{x}+C$

(2) 与式 $=\displaystyle\int\left(4x-4+\frac{1}{x}\right)dx=2x^2-4x+\log|x|+C$

(3) 与式 $=\dfrac{1}{5}e^{5x}-\dfrac{1}{3}\cos x+C$

(4) 与式 $=\dfrac{1}{4}\log|4x+5|+C$

(5) 与式 $=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{5}}+C$

(6) 与式 $=\displaystyle\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx=\log|x|+\log|x+\sqrt{x^2+1}|+C=\log|x(x+\sqrt{x^2+1})|+C$

2. (1) 与式 $=\displaystyle\int_0^2(3x^3-6x^2)dx=\left[\frac{3}{4}x^4-2x^3\right]_0^2=12-16=-4$

(2) 与式 $=\displaystyle\int_1^4(x^{\frac{3}{2}}-3x^{\frac{1}{2}}+4x^{-\frac{1}{2}})dx=\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-3\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+4\cdot 2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^4=\frac{64}{5}-16+16-\left(\frac{2}{5}-2+8\right)=\frac{32}{5}$

(3) 与式 $=[e^x+\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}=e^{\frac{\pi}{2}}+\sin\dfrac{\pi}{2}-e^0-\sin 0=e^{\frac{\pi}{2}}$

(4) 与式 $=2\displaystyle\int_0^1(5x^4+x^2+1)dx=2\left[x^5+\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1=2\left(1+\frac{1}{3}+1\right)=\frac{14}{3}$

(5) 与式 $=2\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}dx=2\left[\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}\right]_0^1=2\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{2}$

(6) 与式 $=\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^2+\frac{1}{3}}dx=\frac{\sqrt{3}}{3}[\tan^{-1}\sqrt{3}x]_0^1=\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

3. $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^1(ax^2+bx+c)dx=2\int_0^1(ax^2+c)dx=2\left[\frac{a}{3}x^3+cx\right]_0^1=\frac{2}{3}a+2c=1\cdots①$

$\displaystyle\int_{-1}^1 xf(x)dx=\int_{-1}^1(ax^3+bx^2+cx)dx=2\int_0^1 bx^2dx=2\left[\frac{b}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}b=0\cdots②$

$\displaystyle\int_{-1}^1 x^2f(x)dx=\int_{-1}^1(ax^4+bx^3+cx^2)dx=2\int_0^1(ax^4+cx^2)dx=2\left[\frac{a}{5}x^5+\frac{c}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{5}a+\frac{2}{3}c=1\cdots③$

②より $b=0$. ①, ③より $a=\dfrac{15}{4},\ c=-\dfrac{3}{4}$

4. $\displaystyle\int\sinh x dx=\int\frac{e^x-e^{-x}}{2}dx=\frac{e^x-e^{-x}(-1)}{2}+C=\frac{e^x+e^{-x}}{2}+C=\cosh x+C$

$\displaystyle\int\cosh x dx=\int\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx=\frac{e^x+e^{-x}(-1)}{2}+C=\frac{e^x-e^{-x}}{2}+C=\sinh x+C$

5. $y=x^3-x$ と x 軸との交点の x 座標は $x^3-x=x(x-1)(x+1)=0$ より $x=0,\pm1$.

$-1<x<0$ のとき $x^3-x>0$. $0<x<1$ のとき $x^3-x<0$ よって求める面積 S は

$S=\displaystyle\int_{-1}^0(x^3-x)dx-\int_0^1(x^3-x)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

p.96 練習問題 1-B

1. 左辺 $=\displaystyle\int_\alpha^\beta\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}dx=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x\right]_\alpha^\beta$

$=\dfrac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)-\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)(\beta^2-\alpha^2)+\alpha\beta(\beta-\alpha)=\dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)\{2\beta^2+2\alpha\beta+2\alpha^2-3(\alpha+\beta)^2+6\alpha\beta\}$

$=\dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)(-\beta^2+2\alpha\beta-\alpha^2)=-\dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=$ 右辺

2. $C=\displaystyle\int_{-1}^1 f(t)dt\cdots①$ とおくと $f(x)=3x^2-x+C$ よって $\displaystyle\int_{-1}^1 f(t)dt=\int_{-1}^1(3t^2-t+C)dt=2\int_0^1(3t^2+C)dt$

$=2[t^3+Ct]_0^1=2+2C$. ①より $C=2+2C$ よって $C=-2$. ゆえに $f(x)=3x^2-x-2$

3. $F(x)$ を $f(x)$ の不定積分の 1 つとすると $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^{x+1}f(t)dt=\frac{d}{dx}[F(t)]_x^{x+1}=\frac{d}{dx}\{F(x+1)-F(x)\}$

$=F'(x+1)-F'(x)=f(x+1)-f(x)$. $f(x)=ax^2+bx+c$ とおくと

$f(x+1)-f(x)=a(x+1)^2+b(x+1)+c-ax^2-bx-c=2ax+a+b$ よって条件より $2ax+a+b=8x-3$

$2a=8, a+b=-3$. よって $a=4, b=-7$, $f(2)=0$ より $4a+2b+c=0$ よって $16-14+c=0$, $c=-2$

$f(x)=4x^2-7x-2$.

4. (1) $\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)dt=\int_{-x}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{x} f(t)dt=-\int_{0}^{-x} f(t)dt+\int_{0}^{x} f(t)dt=-S(-x)+S(x)=S(x)-S(-x)$

(2) (1) より $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{-x}^{x} f(t)dt=\frac{d}{dx}\{S(x)-S(-x)\}=S'(x)-S'(-x)(-x)'=f(x)+f(-x)$

5. (1) $0\leqq x\leqq 1$ のとき $x^2\leqq x^{\frac{1}{2}}\leqq x^0$. つまり $x^2\leqq\sqrt{x}\leqq 1$ よって $1+x^2\leqq 1+\sqrt{x}\leqq 2$, $\displaystyle\frac{1}{1+x^2}\geqq\frac{1}{1+\sqrt{x}}\geqq\frac{1}{2}$

(2) (1) で等号は常に成り立つことはないので $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{2}dx<\int_0^1\frac{1}{1+\sqrt{x}}dx<\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$

$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}[x]_0^1=\frac{1}{2}$, $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=[\tan^{-1}x]_0^1=\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}$. よって $\displaystyle\frac{1}{2}<\int_0^1\frac{1}{1+\sqrt{x}}dx<\frac{\pi}{4}$

6. (1) $\mathrm{OP}=a$, $\mathrm{OQ}=t$ より $\mathrm{PQ}^2+t^2=a^2$ よって $\mathrm{PQ}=\sqrt{a^2-t^2}$. よって $\triangle\mathrm{OQP}=\dfrac{1}{2}t\sqrt{a^2-t^2}$

$\angle\mathrm{OPQ}=\theta$ とすると $\angle\mathrm{BOP}=\theta$ で扇形 $\mathrm{OPB}=\dfrac{1}{2}a^2\theta$. $\sin\theta=\dfrac{t}{a}$ だから $\theta=\sin^{-1}\dfrac{t}{a}$

よって扇形 $\mathrm{OPB}=\dfrac{1}{2}a^2\sin^{-1}\dfrac{t}{a}$

(2) 定積分の値は $\triangle\mathrm{OQP}$ と扇形 OPB の面積の和なので

$\displaystyle\int_0^t\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2}t\sqrt{a^2-t^2}+\frac{1}{2}a^2\sin^{-1}\frac{t}{a}=\frac{1}{2}\left(t\sqrt{a^2-t^2}+a^2\sin^{-1}\frac{t}{a}\right)$