第 5 章　§ 3. 加法定理とその応用

p. 162 練習問題 3-A

1. $\tan^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$(p. 129) より $\left(-\dfrac{3}{4}\right)^2 + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ よって $\cos^2\alpha = \dfrac{16}{25}$.
   α が鈍角より $\cos\alpha < 0$ ゆえに $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}\cdots$① 　$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$(p. 129) より
   $-\dfrac{3}{4} = \dfrac{\sin\alpha}{-\frac{4}{5}}$ よって $-\dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{4}{5}\right) = \sin\alpha$ ゆえに $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}\cdots$②
   $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$(p. 129) より $\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta = 1 - \left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right) = 1 - \dfrac{4}{5} = \dfrac{1}{5}$
   β が鈍角より $\sin\beta > 0$ ゆえに $\sin\beta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdots$③. $\tan\beta = \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{-\frac{2}{\sqrt{5}}} = -\dfrac{1}{2}\cdots$④
   (1) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \dfrac{3}{5}\cdot\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right) + \left(-\dfrac{4}{5}\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}} = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$
   (2) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \left(-\dfrac{4}{5}\right)\cdot\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right) - \dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$
   (3) $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{-\dfrac{3}{4} - \left(-\dfrac{1}{2}\right)}{1 + \left(-\dfrac{3}{4}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)} = -\dfrac{2}{11}$

2. $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$
   $\pi < \alpha < \dfrac{3}{2}\pi$ より $\cos\alpha < 0$ ゆえに $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.　2 倍角の公式より
   $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$
   $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \dfrac{1}{3}$　半角の公式より
   $\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{2} = \dfrac{1-(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})}{2} = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{3+\sqrt{6}}{6}$
   $\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{2} = \dfrac{1+(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})}{2} = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{3-\sqrt{6}}{6}$
   $\pi < \alpha < \dfrac{3}{2}\pi$ より $\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{3}{4}\pi$. よって $\sin\dfrac{\alpha}{2} > 0, \cos\dfrac{\alpha}{2} < 0$ だから
   $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{3+\sqrt{6}}{6}}, \cos\dfrac{\alpha}{2} = -\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{6}}{6}}$

3. (1) 左辺 $= \dfrac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}$. 分母分子を $\cos\alpha\cos\beta$ で割ると
   左辺 $= \dfrac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan\alpha - \tan\beta} =$ 右辺
   (2) 左辺 $= \dfrac{\tan\dfrac{\pi}{4} + \tan x}{1 - \tan\dfrac{\pi}{4}\tan x}\cdot\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{4} - \tan x}{1 + \tan\dfrac{\pi}{4}\tan x} = \dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}\cdot\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x} = 1 =$ 右辺

4. (1) 左辺 $= \sin 3\theta = \sin(2\theta+\theta) = \sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta$　2 倍角の公式により
   左辺 $= (2\sin\theta\cos\theta)\cos\theta + (1 - 2\sin^2\theta)\sin\theta = 2\sin\theta\cos^2\theta + (1 - 2\sin^2\theta)\sin\theta$
   $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ だから
   左辺 $= 2\sin\theta(1 - \sin^2\theta) + (1 - 2\sin^2\theta)\sin\theta = 2\sin\theta - 2\sin^3\theta + \sin\theta - 2\sin^3\theta$
   $= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta =$ 右辺
   (2) 左辺 $= \cos 3\theta = \cos(2\theta+\theta) = \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta$　2 倍角の公式により

左辺 $=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-(2\sin\theta\cos\theta)\sin\theta=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2\sin^2\theta\cos\theta$

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ だから

左辺 $=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2(1-\cos^2\theta)\cos\theta=2\cos^3\theta-\cos\theta-2\cos\theta+2\cos^3\theta$

$=4\cos^3\theta-3\cos\theta=$ 右辺

5. (1) 積を和・差に直す公式より $\sin\theta\cos 3\theta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\theta+3\theta)+\sin(\theta-3\theta)\}=\dfrac{1}{2}\{\sin 4\theta+\sin(-2\theta)\}$

sin は奇関数だから $\sin\theta\cos 3\theta=\dfrac{1}{2}(\sin 4\theta-\sin 2\theta)$

同様にして $\sin\theta\cos 5\theta=\dfrac{1}{2}(\sin 6\theta-\sin 4\theta), \sin\theta\cos 7\theta=\dfrac{1}{2}(\sin 8\theta-\sin 6\theta)$

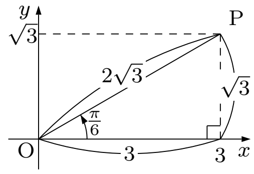
よって与式 $=\dfrac{1}{2}(\sin 4\theta-\sin 2\theta+\sin 6\theta-\sin 4\theta+\sin 8\theta-\sin 6\theta)=\dfrac{1}{2}(\sin 8\theta-\sin 2\theta)$

(2) cos は偶関数であることに注意して (1) と同様に $\sin\theta\sin 3\theta=-\dfrac{1}{2}(\cos 4\theta-\cos 2\theta)$

$\sin\theta\sin 5\theta=-\dfrac{1}{2}(\cos 6\theta-\cos 4\theta), \sin\theta\sin 7\theta=-\dfrac{1}{2}(\cos 8\theta-\cos 6\theta)$

よって与式 $=-\dfrac{1}{2}(\cos 4\theta-\cos 2\theta+\cos 6\theta-\cos 4\theta+\cos 8\theta-\cos 6\theta)=\dfrac{1}{2}(\cos 2\theta-\cos 8\theta)$

6. (1)

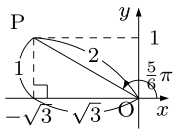


OP$=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$　3 辺の比は $2:1:\sqrt{3}$ だから

OP のつくる角度は $30^\circ=\dfrac{\pi}{6}$ よって

$3\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sqrt{3}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

(2)

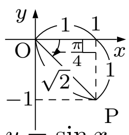


OP$=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=2$　3 辺の比は $2:1:\sqrt{3}$ だから

OP のつくる角度は $150^\circ=\dfrac{5}{6}\pi$ よって

$-\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin\left(x+\dfrac{5}{6}\pi\right)$

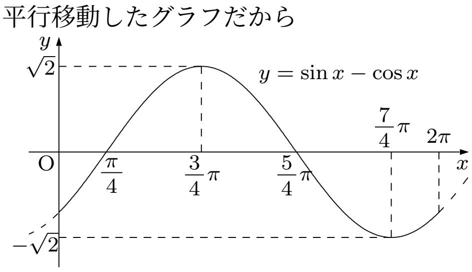
7.



OP$=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$　3 辺の比は $1:1:\sqrt{2}$ だから

OP のつくる角度は $-45^\circ=-\dfrac{\pi}{4}$ よって

$y=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$　グラフは $y=\sin x$ のグラフを y 軸方向に $\sqrt{2}$ 倍に拡大, x 軸方向に $\dfrac{\pi}{4}$ だけ平行移動したグラフだから



最大値 $\sqrt{2}$ $\left(x=\dfrac{3}{4}\pi\right)$

最小値 $-\sqrt{2}$ $\left(x=\dfrac{7}{4}\pi\right)$

p. 163 練習問題 3-B

1. 左辺 $=a\left(\cos B\cos\dfrac{\pi}{3}+\sin B\sin\dfrac{\pi}{3}\right)+b\left(\cos A\cos\dfrac{\pi}{3}-\sin A\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

$=a\left(\dfrac{1}{2}\cos B+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin B\right)+b\left(\dfrac{1}{2}\cos A-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin A\right)$

余弦定理より $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}, \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

正弦定理より $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ より $\sin B=\dfrac{b}{2R}, \sin A=\dfrac{a}{2R}$ だから

左辺 $=a\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{b}{2R}\right)+b\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{a}{2R}\right)$

$=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{4c}+\dfrac{\sqrt{3}ab}{4R}+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{4c}-\dfrac{\sqrt{3}ab}{4R}=\dfrac{c^2+a^2-b^2+b^2+c^2-a^2}{4c}=\dfrac{2c^2}{4c}=\dfrac{c}{2}=$ 右辺

2. (1) 和差を積に直す公式により $\cos 80^\circ - \cos 20^\circ = -2\sin\dfrac{80^\circ + 20^\circ}{2}\sin\dfrac{80^\circ - 20^\circ}{2} = -2\sin 50^\circ \sin 30^\circ$

$= -2(\sin 50^\circ)\cdot\dfrac{1}{2} = -\sin 50^\circ$ よって与式 $= -\sin 50^\circ + \cos 40^\circ$

$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$(p. 125) より与式 $= -\sin(90^\circ - 40^\circ) + \cos 40^\circ = -\cos 40^\circ + \cos 40^\circ = 0$

(2) 積を和差に直す公式により $\cos 10^\circ \cos 50^\circ = \dfrac{1}{2}\{\cos(10^\circ + 50^\circ) + \cos(10^\circ - 50^\circ)\} = \dfrac{1}{2}\{\cos 60^\circ + \cos(-40^\circ)\}$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} + \cos 40^\circ\right)$ よって与式 $= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} + \cos 40^\circ\right)\cos 70^\circ = \dfrac{1}{4}\cos 70^\circ + \dfrac{1}{2}\cos 40^\circ \cos 70^\circ$

さらに積を和差に直す公式により

与式 $= \dfrac{1}{4}\cos 70^\circ + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\{\cos(40^\circ + 70^\circ) + \cos(40^\circ - 70^\circ)\} = \dfrac{1}{4}\cos 70^\circ + \dfrac{1}{4}\cos 110^\circ + \dfrac{1}{4}\cos(-30^\circ)$

$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$(p. 128) より $\cos 110^\circ = \cos(180^\circ - 70^\circ) = -\cos 70^\circ$ だから

与式 $= \dfrac{1}{4}\cos(-30^\circ) = \dfrac{1}{4}\cos 30^\circ = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$

3. (1) $\theta = 18^\circ$ より $\sin 2\theta = \sin 36^\circ, \cos 3\theta = \cos 54^\circ$　$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$(p. 125) より

$\sin 36^\circ = \sin(90^\circ - 54^\circ) = \cos 54^\circ$ よって $\sin 2\theta = \cos 3\theta$

(2) (1) より $\sin 2\theta = \cos 3\theta$　2 倍角の公式と 3 倍角の公式 (p. 162. 3-A. 4) より $2\sin\theta\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$\cos\theta = \cos 18^\circ \neq 0$ より $\cos\theta$ で両辺を割って $2\sin\theta = 4\cos^2\theta - 3$　$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ だから

$2\sin\theta = 4(1 - \sin^2\theta) - 3$ よって $4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 = 0$　2 次方程式の解の公式より

$\sin\theta = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 4\cdot(-1)}}{2\times 4} = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$　$\sin\theta = \sin 18^\circ > 0$ より

$\sin\theta = \sin 18^\circ = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{4}$

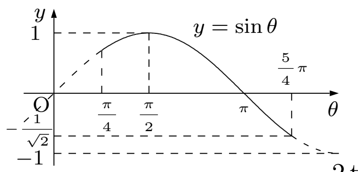
4. 2 倍角の公式より $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ だから $\sin x\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$. 同様に $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ より

$2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$. $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ より $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$. よって

$f(x) = 2\sin^2 x - \sin x\cos x + \cos^2 x = (1 - \cos 2x) - \dfrac{1}{2}\sin 2x + \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2x) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}(\sin 2x + \cos 2x)$

三角関数の合成により $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ だから $f(x) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より $\dfrac{\pi}{4} \leqq 2x + \dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{5}{4}\pi$ だから $\theta = 2x + \dfrac{\pi}{4}$ とおくと $f(x) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta$　$\left(\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{5}{4}\pi\right)$



$-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin\theta \leqq 1$ よって $2 \geqq f(x) \geqq \dfrac{3 - \sqrt{2}}{2}$

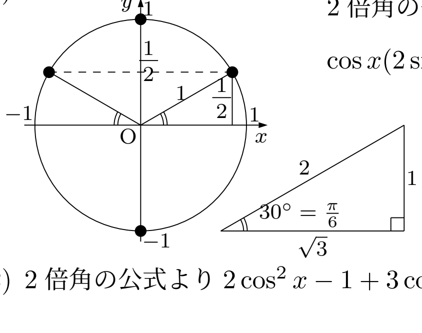
最大値 2, 最小値 $\dfrac{3 - \sqrt{2}}{2}$

5. 2 倍角の公式より $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \dfrac{2t}{1 - t^2}$ 同様に $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\tan^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$(p. 129) より $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{\tan^2\alpha + 1} = \dfrac{1}{t^2 + 1}$ よって $\cos 2\alpha = 2\cdot\dfrac{1}{t^2 + 1} - 1 = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$(P. 129) より $\tan 2\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$ よって $\dfrac{2t}{1 - t^2} = \dfrac{\sin 2\alpha}{\frac{1 - t^2}{1 + t^2}}$ ゆえに $\sin 2\alpha = \dfrac{2t}{1 - t^2}\cdot\dfrac{1 - t^2}{1 + t^2} = \dfrac{2t}{1 + t^2}$

6. (1)



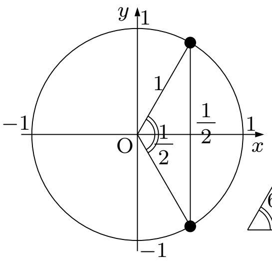
2 倍角の公式より $2\sin x\cos x = \cos x$ よって $2\sin x\cos x - \cos x = 0$,

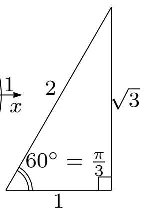
$\cos x(2\sin x - 1) = 0$ 従って $\cos x = 0$ または $2\sin x - 1 = 0$ よって

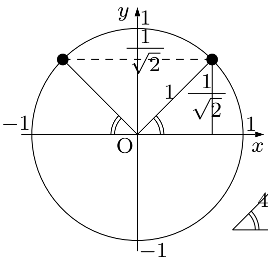
$\cos x = 0$ または $\sin x = \dfrac{1}{2}$ ゆえに $x = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3}{2}\pi, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5}{6}\pi$

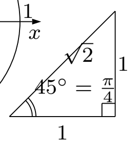
(2) 2 倍角の公式より $2\cos^2 x - 1 + 3\cos x - 1 = 0$ よって $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$,

$(2\cos x-1)(\cos x+2)=0, \cos x=\dfrac{1}{2}, -2\quad -1 \leqq \cos x \leqq 1$ より $\cos x=\dfrac{1}{2}\quad x=\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5}{3}\pi$









(3) (p. 162 3-A. 7) と同様に三角関数の合成より $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=1$ よって

$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\quad 0 \leqq x<2\pi$ より $-\dfrac{\pi}{4} \leqq x-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{7}{4}\pi$ よって $x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3}{4}\pi \therefore x=\dfrac{\pi}{2}, \pi$

(4) 三角関数の合成より $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=1$ よって $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$

$0 \leqq x<2\pi$ より $\dfrac{\pi}{3} \leqq x+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{7}{3}\pi$ よって $x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5}{6}\pi, \dfrac{\pi}{6}+2\pi\left(=\dfrac{13}{6}\pi\right)$ $\left(\dfrac{\pi}{6}\text{は範囲外だから}\right)$

よって $x=\dfrac{5}{6}\pi-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{13}{6}\pi-\dfrac{\pi}{3}$ ゆえに $x=\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{11}{6}\pi$

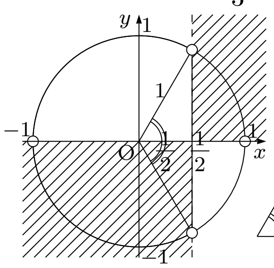
7. (1) 2 倍角の公式より $2\sin x\cos x-\sin x>0$ より $\sin x(2\cos x-1)>0$ よって $\begin{cases}\sin x>0\\ 2\cos x-1>0\end{cases}$ または

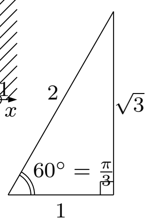
$\begin{cases}\sin x<0\\ 2\cos x-1<0\end{cases}$ $\quad\sin x>0$ より $0<x<\pi\cdots$①. $2\cos x-1>0$ より $\cos x>\dfrac{1}{2}$ よって

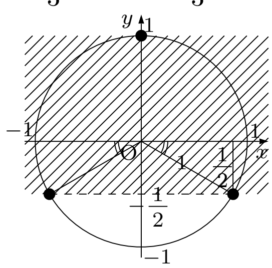
$0<x<\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5}{3}\pi<x<2\pi\cdots$②. ①, ②より $0<x<\dfrac{\pi}{3}$.

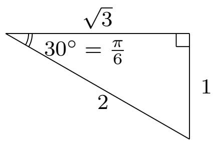
同様に $\sin x<0$ より $\pi<x<2\pi\cdots$③. $2\cos x-1<0$ より $\cos x<\dfrac{1}{2}$ よって $\dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{5}{3}\pi\cdots$④

③, ④より $\pi<x<\dfrac{5}{3}\pi$. よって $0<x<\dfrac{\pi}{3}, \pi<x<\dfrac{5}{3}\pi$









(2) 2 倍角の公式より $1-2\sin^2 x+\sin x \geqq 0$ より $2\sin^2 x-\sin x-1 \leqq 0$ よって $(2\sin x+1)(\sin x-1) \leqq 0$ これは $\sin x$ の 2 次不等式だから $-\dfrac{1}{2} \leqq \sin x \leqq 1\quad \sin x \leqq 1$ はすべての x について成り立つから $\sin x \geqq -\dfrac{1}{2}$

よって $0 \leqq x \leqq \dfrac{7}{6}\pi, \dfrac{11}{6}\pi \leqq x<2\pi$

8. 左辺 $=\cos\alpha\cos\beta+i\cos\alpha\sin\beta+i\sin\alpha\cos\beta+i^2\sin\alpha\sin\beta$

$i^2=-1$ より左辺 $=\cos\alpha\cos\beta+i\cos\alpha\sin\beta+i\sin\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+i(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$

加法定理より左辺 $=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)=$ 右辺