第 1 章§ 1 平面のベクトル

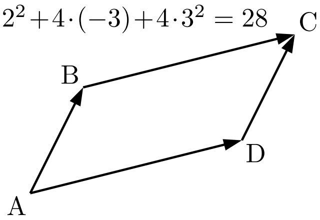
p.23 練習問題 1-A

1. (1) $2(\vec{a}+\vec{b}+\vec{x})=3\vec{b}\therefore 2\vec{a}+2\vec{b}+2\vec{x}=3\vec{b}\therefore 2\vec{x}=-2\vec{a}+\vec{b}\therefore \vec{x}=\underline{-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}}=\underline{\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a})}$

   (2) $\vec{a}-\vec{x}=\vec{x}-\vec{b}\therefore -2\vec{x}=-\vec{a}-\vec{b}\therefore \vec{x}=\underline{\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})}$

2. $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=2\cdot3\cos\frac{2}{3}\pi=2\cdot3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-3$ だから $|\vec{a}+2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=2^2+4\cdot(-3)+4\cdot3^2=28$

   よって $|\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{28}=\underline{2\sqrt{7}}$



3. 証明　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a},\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$ とおくと, 平行四辺形より $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b},\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$

   よって $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{a}+\vec{b},\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\vec{b}-\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\vec{b}-\vec{a}$ だから

   左辺 $=|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2=2|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2=$ 右辺

4. $\vec{a}+\vec{b}=(2,3)+(x,-2)=(x+2,1),\vec{a}-\vec{b}=(2,3)-(x,-2)=(2-x,5)$

   (1) $(\vec{a}+\vec{b})=m(\vec{a}-\vec{b})$ だから $(x+2,1)=m(2-x,5)\therefore x+2=m(2-x)\cdots$①$,1=5m\cdots$②.

   ②より $m=\frac{1}{5}$. ①に代入 $x+2=\frac{1}{5}(2-x)$. これを解いて $\underline{x=-\frac{4}{3}}$

   (2) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$ だから $(x+2,1)\cdot(2-x,5)=0\therefore(x+2)(2-x)+5=0$ これを解いて $\underline{x=\pm3}$

5. L, M, N は BC, CA, AB の中点だから $\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2},\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{2},\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}$. よって

   右辺 $=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{2}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=$ 左辺.

6. 第 1 式より $\frac{x-2}{-2}=t$, 第 2 式より $\frac{y+1}{3}=t$ よって $\frac{x-2}{-2}=\frac{y+1}{3}$ またはこれを整理して $3x+2y-4=0$

7. (1) $(2,-1)$

   (2) 点 P をとおり, 方向ベクトルが $(2,-1)$ となるから $x=1+2t,y=-1-t$(t は実数)

   (3) 交点の座標を (x,y) とおくと, 交点は ℓ_1 上にあるから $x=1+2t,y=-1-t\cdots$①. 一方交点は ℓ 上にもあるから $2x-y+3=0$ を満たす. これに①を代入して $2(1+2t)-(-1-t)+3=0$. よって $t=-\frac{6}{5}$. よって①より $x=1+2\cdot\left(-\frac{6}{5}\right)=-\frac{7}{5},y=-1-\left(-\frac{6}{5}\right)=\frac{1}{6}$. よって交点の座標は $\left(-\frac{7}{5},\frac{1}{5}\right)$

8. (1) $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$ とおくと $(9,-8)=m(3,2)+n(1,-4)=(3m+n,2m-4n)$. よって $3m+n=9,2m-4n=-8$.

   これを解いて $m=2,n=3$. よって $\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}$

   (2) $\vec{a}=m\vec{b}+n\vec{c}$ とおくと $(3,2)=m(1,-4)+n(9,-8)=(m+9n,-4m-8n)$. よって $m+9n=3,-4m-8n=2$.

   これを解いて $m=-\frac{3}{2},n=\frac{1}{2}$. よって $\vec{a}=-\frac{3}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

p.25 練習問題 1-B

1. $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{|\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b}}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{a}\cdot\frac{|\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b}}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}=\frac{|\vec{b}||\vec{a}|^2+|\vec{a}|\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}=\frac{|\vec{a}|(|\vec{a}||\vec{b}|+\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}$ よって

   $\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}|}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{|\vec{a}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}|}=\frac{|\vec{a}||\vec{b}|+\vec{a}\cdot\vec{b}}{(|\vec{a}|+|\vec{b}|)|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|}$, 同様に $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{|\vec{b}|(\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}||\vec{b}|)}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}$

   $\cos\beta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}|}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{|\vec{b}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}|}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}||\vec{b}|}{(|\vec{a}|+|\vec{b}|)|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|}$, よって $\cos\alpha=\cos\beta$

2. $\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3},\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{3},\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}$. よって

   △LMN の重心は $\frac{\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{3}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}}{3}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{9}$

$= \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}$. よって $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心と $\triangle\mathrm{LMN}$ の重心は一致する.

3. (1) 証明 左辺 $= \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta)^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1-\cos^2\theta)} = \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\theta}$, $0 \leqq \theta < \pi$ より $\sin\theta \geqq 0$

   よって左辺 $= |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta =$ 右辺

   (2) 新基礎数学 5 章§ 1 の三角形の面積の公式より $S = \dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin\theta = \dfrac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ だから

   (1) より $S = \dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

   (3) $|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = (a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2 = a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2-(a_1^2b_1^2+2a_1b_1a_2b_2+a_2^2b_2^2)$

   $= a_1^2b_2^2-2a_1b_1a_2b_2+a_2^2b_1^2 = (a_1b_2-a_2b_1)^2$ よって (2) より $S = \dfrac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2} = \dfrac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$

4. $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (-2,0)-(1,3) = (-3,-3)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (-1,-2)-(1,3) = (-2,-5)$ だから 3 より

   $\triangle\mathrm{ABC} = |(-3)\cdot(-5)-(-3)\cdot(-2)| = |9| = 9$.

5. (1) $|\overrightarrow{\mathrm{CP}}| = r$ より $\overrightarrow{\mathrm{CP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ だから $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = r$

   (2) (1) より $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 = r^2$. $\mathrm{P}(x,y)$ とすると $\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (x,y)-(a,b) = (x-a,y-b)$ よって

   $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 = (x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$.

6. (1) 直径に対する円周角は直角だから $\angle\mathrm{APB} = 90^\circ$. よって $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BP}}$ つまり $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}} = 0$

   $(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}) = 0$

   (2) $\mathrm{P}(x,y)$ とすると $\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (x,y)-(x_1,y_1) = (x-x_1,y-y_1)$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (x,y)-(x_2,y_2) = (x-x_2,y-y_2)$

   よって $(x-x_1,y-y_1)\cdot(x-x_2,y-y_2) = (x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2) = 0$