線形代数問題集の補足

p.14

22. 解答参照 $Q(x,y,z)$ とおくと A は PQ の中点になるから $\dfrac{x+2}{2}=4, \dfrac{y-3}{2}=2, \dfrac{z+1}{2}=3.$

 $\therefore x=6, y=7, z=-7$ よって $(6,7,-7)$

25. (3) 解答参照 三角形の面積の公式 (基礎数学の三角比) $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$

26. (3) l の方程式 (媒介変数表示)$x=2-2t, y=t, z=-1+2t.$ これらを平面の方程式

 $2x-y-2z=-6$ に代入. $2(2-2t)-t-(-1+2t)=-6. \therefore -9t+6=-6. \therefore t=\dfrac{4}{3}.$

 l の方程式に代入して $x=2-2\cdot\dfrac{4}{3}=-\dfrac{2}{3}, y=\dfrac{4}{3}, z=-1+2\cdot\dfrac{4}{3}=\dfrac{5}{3}. \therefore \left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{5}{3}\right).$

28. (2) 直線の方程式 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-4}{1}=t$ とおくと $x=1+t, y=1-t, z=4+t\cdots$①

 を (1) で変形した球の方程式 $(x-4)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16\cdots$② に代入.

 $(1+t-4)^2+(1-t+2)^2+(4+t-3)^2=16$ よって $3t^2-10t+3=0. \therefore (3t-1)(t-3)=0.$

 $t=\dfrac{1}{3}, 3.$ これを直線の方程式①に代入. $t=\dfrac{1}{3}$ のとき $x=\dfrac{4}{3}, y=\dfrac{2}{3}, z=\dfrac{13}{3}. \therefore \left(\dfrac{4}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{13}{3}\right)$

 $t=3$ のとき $x=4, y=-2, z=7. \therefore (4,-2,7)$

 (3) 球の方程式より $\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{13}{3}\right)$ における接平面の方程式は

 $\left(\dfrac{4}{3}-4\right)(x-4)+\left(\dfrac{2}{3}+2\right)(y+2)+\left(\dfrac{13}{3}-3\right)(z-3)=16.$

 $\therefore -\dfrac{8}{3}x+\dfrac{32}{3}+\dfrac{8}{3}y+\dfrac{16}{3}+\dfrac{4}{3}z-4=16, -\dfrac{8}{3}x+\dfrac{8}{3}y+\dfrac{4}{3}z=4, \therefore 2x-2y-z=-3.$

 $(4,-2,7)$ における接平面の方程式は

 $(4-4)(x-4)+(-2+2)(y+2)+(7-3)(z-3)=16.$ $4z-12=16$

 $\therefore z=7.$

29. 解答参照

30. 解答参照 点 H は直線上の点でもあるから直線の方程式 (媒介変数表示) を満たす. 線分 PH は垂線なので直線と直交. したがって方向ベクトル $\overrightarrow{v}$ と直交. よって内積 $=0$.

31. 解答参照 (2) A と B は平面 α に関して対称だから線分 AB は α と直交し, α によって 2 等分割される.

32. 中心が $(0,-2,0)$ の球の方程式は $x^2+(y+2)^2+z^2=r^2.$

 $(1,-3,\sqrt{2})$ が球上の点だから $1^2+(-3+2)^2+\sqrt{2}^2=r^2.$ よって $r^2=4.$

 $(1,-3,\sqrt{2})$ における接平面の方程式は $1\cdot x+(-3+2)(y+2)+\sqrt{2}z=4. \therefore x-y+\sqrt{2}z=6.$

 接平面と x 軸 $(y=0, z=0)$ との交点 A は $y=0, z=0$ を代入して $x=6.$ よって $A(6,0,0).$

 同様にして y 軸との交点 $B(0,-6,0).$ z 軸との交点 $C\left(0,0,\dfrac{6}{\sqrt{2}}\right),$ よって $C(0,0,3\sqrt{2}).$

33. 解答参照 (3) CH((1) で求めた直線) は平面と垂直だから $\triangle CHR$ は直角三角形.

$C(1,1,0),\ H(3,2,2)$ より $CH=\sqrt{(3-1)^2+(2-1)^2+(2-0)^2}=\sqrt{9}=3.$

CR は球の半径だから $CR=\sqrt{13}.$ よって $3^2+r^2=\sqrt{13}^2.$ $r=2.$

34. 解答参照

35. 解答参照 求めるベクトルの大きさ $\sqrt{14}$ より $|\overrightarrow{p}|=\sqrt{14}.$ $|\overrightarrow{a}|=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}.$

よって $|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{p}|\cos 60^\circ=\sqrt{14}\sqrt{14}\cdot\dfrac{1}{2}=7.$

36. 解答参照 $l_1,\ l_2$ の方向ベクトルは平面上にあるから平面の法線ベクトルと直交する.

37. 解答参照 交線の方向ベクトルは両方の平面に含まれるから両方の法線ベクトルと直交する.

別解 $x=1-2k$ より $x-1=-2k.$ $\therefore \dfrac{x-1}{-2}=k.$ よって $z=k, y=k$ より $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}.$

38. 解答参照 (1)$(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})-(|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|)^2=|\overrightarrow{a}|^2+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2-(|\overrightarrow{a}|^2+2|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|+|\overrightarrow{b}|^2)$

$=2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}-2|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|.$

(2) $\Big||\overrightarrow{a}|-|\overrightarrow{b}|\Big|^2-|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2=\Big||\overrightarrow{a}|-|\overrightarrow{b}|\Big|^2-(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})$

$=|\overrightarrow{a}|^2-2|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|+|\overrightarrow{b}|^2-(|\overrightarrow{a}|^2-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2)=-2|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=2(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}-|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|)$

シュワルツの不等式より $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\leqq|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|.$ $\therefore \Big||\overrightarrow{a}|-|\overrightarrow{b}|\Big|\leqq|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|$