微分積分 I 第 1 章　§ 2. いろいろな関数の導関数

p. 43 練習問題 2-A

1. (1) $y = \dfrac{1}{(e^{2x}+1)^3} = (e^{2x}+1)^{-3}$. 合成関数の微分法 (教科書 p. 29, 30 例題 1, 例題 2, 問 1, 問 2, 問 3 参照)
   (2) $y = \dfrac{1}{\sin^4(1-2x)} = \{\sin(1-2x)\}^{-4}$. 合成関数の微分法
   (3) 積の微分法 $y' = (x)'\sqrt{x^2+1} + x\{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\}'$. 以下第 2 項は合成関数の微分法
   (4) 合成関数の微分法
   (5) 合成関数の微分法 $u = \log x$ とおくと $y = \log|u|$. よって $y' = (\log|u|)'(\log x)' = \cdots = \dfrac{1}{x\log x}$
2. (1) $y = \sin^{-1}\dfrac{1}{2}$ とおくと $\cdots\cdots \sin^{-1}\dfrac{1}{2} = \boxed{}$. よって $\sin\left(\sin^{-1}\dfrac{1}{2}\right) = \sin\boxed{} = \boxed{}$
   (なお教科書の解答は間違いで正解は $\dfrac{1}{2}$)(教科書 p. 34〜36 例 2, 問 10, 問 11, 問 12, 問 13, 問 14 参照)
   (2) $\sin\dfrac{2\pi}{3} = \boxed{}$. $y = \sin^{-1}\boxed{}$ とおくと $\cdots\cdots y = \boxed{}$ より $\sin^{-1}\left(\sin\dfrac{2\pi}{3}\right) = \sin^{-1}\boxed{} = \boxed{}$.
3. (1) 合成関数の微分法 $u = \sin x$ とおくと $y = \tan^{-1}u$. (教科書 p. 37 問 15, 問 16 参照)
   (2) $y' = \{\sin^{-1}(\cos x)\}' + x'$. 第 1 項は合成関数の微分法 ($u = \cos x$)
   $0 < x < \pi$ より $\sin x > 0$ だから $\sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{\sin^2 x} = \sin x$ に注意.
4. (1) $\left(\dfrac{1}{2a}\log\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|\right)' = \dfrac{1}{2a}(\log|x-a| - \log|x+a|)' = \cdots$ (教科書 p. 32, 33 例題 3, 問 4, 問 5, 問 8, 問 9 参照)
   (2) $(\log|x+\sqrt{x^2+A}|)' = \dfrac{\{x+(x^2+A)^{\frac{1}{2}}\}'}{x+\sqrt{x^2+A}} = \cdots$
5. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 1$ とおくと $f(x)$ は $[-1, 5]$ で連続で $f(-1) = \boxed{} > 0, f(0) = \boxed{} < 0,$ $f(1) = \boxed{} > 0, f(2) = \boxed{} < 0, f(3) = \boxed{} < 0, f(4) = \boxed{} < 0, f(5) = \boxed{} > 0$. よって中間値の定理より -1 と 0 の間, 0 と 1 の間, 1 と 2 の間, 4 と 5 の間にそれぞれ少なくとも 1 つずつ $f(x) = x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 1 = 0$ の実数解が存在する．4 次方程式の実数解は多くとも 4 つだから, それぞれちょうど 1 つずつの実数解が存在する．よって -1 と 5 の間に $\cdots$ (教科書 p. 40, 41 例題 7, 問 17, 問 18 参照)
6. (1) $\sinh(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \cdots = -\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh x$.
   (2) (1) と同様
   (3) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \cdots = 1$.
   (4) $(\sinh x)' = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{(e^x)' - (e^{-x})'}{2} = \cdots = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$.
   ($(e^{-x})'$ は合成関数の微分 ($u = -x$ とおく))
   (5) (4) と同様
   (6) $(\tanh x)' = \left(\dfrac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \dfrac{(\sinh x)'\cosh x - \sinh x(\cosh x)'}{(\cosh x)^2}$. (4), (5), (3) より $\cdots$

p. 44 練習問題 2-B

1. (1) 積の微分法 $y' = (x^{\frac{1}{2}})'\sin\dfrac{1}{x} + \sqrt{x}\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)'$. 第 2 項は合成関数の微分法 ($u = \dfrac{1}{x}$ とおく)
   (2) 合成関数の微分法　微分後の整理で $\tan\dfrac{x}{2} = \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$, 2 倍角の公式より $2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} = \sin x$ に注意.
   (3) 合成関数の微分法　微分後の整理で $x > 1$ より $x = \sqrt{x^2}$ に注意.

(4) 合成関数の微分法 $y' = \cdots = \dfrac{1}{1+(\frac{1-x}{1+x})^2} \cdot \dfrac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = \cdots = \dfrac{-2}{(1+x)^2+(1-x)^2} = \cdots$

2. (1) $\log y = \log x^{\log x} = \log x \log x = (\log x)^2$. 両辺を x で微分して $\dfrac{y'}{y} = 2(\log x) \cdot \dfrac{1}{x}$.

よって $y' = \dfrac{2y\log x}{x} = \dfrac{2x^{\log x}\log x}{x} = 2x^{\log x - 1}\log x$(教科書 p. 32, 33 例題 4, 問 6, 問 7 参照)

(2) (1) と同様 $\{x\log(\log x)\}'$ は積の微分法, $\{\log(\log x)\}'$ は合成関数の微分法 ($u = \log x$ とおく).

(3) (1) と同様 $\log \dfrac{(x+3)^2(x-2)^3}{(x+1)^4} = 2\log(x+3) + 3\log(x-2) - 4\log(x+1)$.

(4) (1) と同様 $\log \sqrt[3]{\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2}} = \dfrac{\log(x^2+1) - 2\log(x+1)}{3}$.

3. 商の微分法より $y' = \left(\dfrac{\sin x + a}{x^2-1}\right)' = \dfrac{(\sin x + a)'(x^2-1) - (\sin x + a)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \cdots$. この結果と問題文の $y = \dfrac{\sin x + a}{x^2-1}$ を左辺に代入して左辺 $= \cdots =$ 右辺

4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x+1}-1}{x} = \cdots = \square$. これが $f(0) = 1$ と一致するかどうかを調べる.
(連続については教科書 p. 38 (4) 式参照)

5. (1) $\displaystyle\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} \sqrt{x} = \square = f(1)$, $\displaystyle\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0}(ax^2+bx) = \square$.
これらが一致すれば $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x) = \square = f(1)$ となり, $f(x)$ は $x=1$ で連続.

(2) $\displaystyle f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$. ここで $\displaystyle\lim_{h\to +0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to +0} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h} = \cdots = \square$.
$\displaystyle\lim_{h\to -0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to -0} \frac{a(1+h)^2+b(1+h)-1}{h} = \cdots = \square$((1) より $a+b=1 \cdots$ ① に注意).
これらが一致すれば $f'(1)$ が存在し, $f(x)$ は $x=1$ で微分可能. よって $2a+b = \dfrac{1}{2} \cdots$ ②.
①, ②より $\cdots$(微分可能については教科書 p. 10, 11 (2), (3) 式のあたりを参照)

6. (1) $\displaystyle f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2\sin\frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h}$. ここで $-1 \leqq \sin\dfrac{1}{h} \leqq 1$. よって $0 \leqq \left|h\sin\dfrac{1}{h}\right| \leqq |h| \to 0$. よって $\cdots$

(2) $x \neq 0$ のとき $f'(x) = \left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)' = \cdots = \square$
よって $\displaystyle\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \square = \cdots$($x \to 0$ のとき $\cos\dfrac{1}{x}$ は極限なしであることに注意).